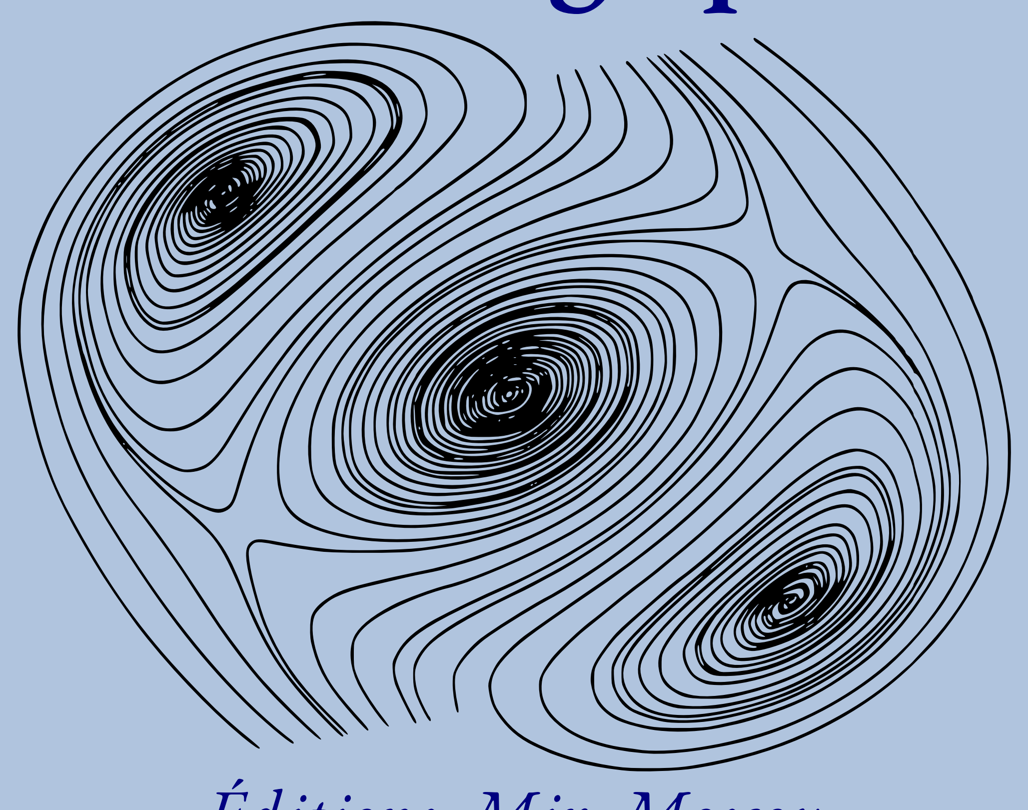
A. Ourmaev

Cours Pratique de Simulation sur Calculateur Analogique



Éditions Mir Moscou

А. С. УРМАЕВ

ПРАКТИКУМ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ НА АВМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. OURMAEV

COURS PRATIQUE DE SIMULATION SUR CALCULATEURS ANALOGIQUES

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par DJILALI EMBAREK

на французском языке

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Le rôle pédagogique des techniques du calcul est reconsidéré dans les écoles techniques supérieures d'U.R.S.S. D'objet d'étude, le calculateur se transforme en outil permettant une assimilation efficace des processus et phénomènes de la simulation mathématique. La matérialisation de cette nouvelle fonction « pédagogique » des calculateurs implique l'enseignement précoce de la programmation dès le second ou le troisième semestre et ne se justifie que si l'on dispose d'une littérature didactique adaptée au niveau des étudiants du second cycle. Mais la situation est loin d'être satisfaisante, notamment en ce qui concerne la simulation mathématique sur calculateurs analogiques.

Les manuels destinés à l'initiation des élèves de première et deuxième année aux calculateurs analogiques faisant défaut, le Cours pratique en question tente de remédier à cette carence. Par son contenu, sa méthode et le caractère de l'exposé, ce cours poursuit le même objectif que les « Eléments de simulation sur calculateurs analogiques » du même auteur, savoir familiariser les élèves de première et seconde année avec la programmation et la manipulation des calculateurs analogiques dans une perspective d'application à l'étude de disciplines scientifiques générales.

Ce cours généralise les acquis de dix ans de travaux de l'Institut de l'Acier et des alliages sur la mise au point d'un système d'utilisation permanente des calculateurs à tous les degrés de l'enseignement. Nous exprimons l'espoir que l'édition de cet ouvrage fera profiter les instituts similaires du fruit de notre travail.

S. Emélianov,

membre correspondant de
l'Académie des sciences de l'U.R.S.S.

AVANT-PROPOS

Le cours pratique est articulé sur quatre chapitres.

Le premier est introductif. Il renferme un grand nombre d'exercices sur l'établissement d'une correspondance entre les schémas fonctionnels, les circuits électriques et les expressions mathématiques réalisées. Ces exercices ont pour but de faire assimiler à l'étudiant les symboles et le langage de la programmation des calculateurs analogiques (langage des organigrammes).

Le second chapitre est consacré aux problèmes de la programmation des calculateurs analogiques, relatifs au câblage d'équations différentielles ordinaires données sous forme de problèmes de Cauchy. Les problèmes abordés se rapprochent au maximum du niveau des premiers semestres et portent sur l'étude, avec la machine, de fonctions et de courbes connues des cours d'analyse mathématique, de géométrie analytique et de géométrie descriptive.

Le troisième chapitre se fixe deux objectifs: d'abord rompre l'étudiant au maniement d'un calculateur analogique, en l'occurrence le MH-7M, et ensuite développer les principales méthodes de simulation mathématique de processus physiques décrits par des problèmes de Cauchy, des problèmes aux limites et des équations différentielles aux dérivées partielles.

Le quatrième chapitre est appliqué. Il contient une vingtaine d'exercices de simulation mathématique empruntés à diverses disciplines.

Le diagramme suivant nous semble le plus favorable à l'assimilation du « Cours pratique »:

Ch. 2, §§ 3 à 5 ↗ ↘
Ch. 1 → Ch. 2, § 1 → Ch. 3, §§ 1, 2 → Ch. 2, § 2 → Ch. 4
Ch. 3, §§ 3 à 5 ↘ ↗

où Ch. désigne le chapitre.

L'auteur tient à exprimer sa profonde gratitude à S. Emélianov, membre correspondant de l'Académie des sciences de

l'U.R.S.S., dont l'attention, l'intérêt et l'aide ont contribué à la formation et l'orientation des principales conceptions pédagogiques.

L'auteur est également profondément reconnaissant aux professeurs B. Anissimov et L. Presnoukhine dont les critiques bienveillantes et les conseils ont considérablement influencé l'essence des « Eléments de simulation sur calculateurs analogiques » et du « Cours pratique de simulation ».

CHAPITRE PREMIER

OPÉRATEURS ET SCHÉMAS

Dans les exercices des planches P1 à P29, on demande d'établir une correspondance entre les circuits électriques, les schémas fonctionnels et les expressions mathématiques.

Pour faciliter la résolution des exercices, on a donné sur la figure 1.1 un tableau des principaux opérateurs avec les circuits électriques et les schémas fonctionnels correspondants, ainsi que les expressions mathématiques réalisées.

EXEMPLE 1.1. Etablir une correspondance entre les circuits électriques des opérateurs de la planche P1 et les schémas fonctionnels des opérateurs de la planche P2.

En utilisant le tableau de la figure 1.1 et en calculant les coefficients de transfert des opérateurs, on trouve les équivalents fonctionnels des circuits électriques donnés. La solution du problème est représentée sous forme du diagramme de correspondance de la figure 1.2. Les six numéros supérieurs figurent les circuits de P1, les huit numéros inférieurs, les schémas de P2. L'équivalence est traduite par un segment reliant les numéros supérieurs aux inférieurs. A l'examen du diagramme on remarque qu'à deux reprises deux circuits électriques distincts (2 ; 4 et 1 ; 3) ont le même équivalent fonctionnel (3 et 8). Cela veut dire que le passage d'un schéma fonctionnel à son équivalent électrique n'est pas univoque.

1.1. Trouver sur P4 les équivalents électriques des schémas fonctionnels représentés sur P3.

1.2. Trouver sur P6 les schémas fonctionnels et sur P7 les expressions analytiques correspondant aux circuits électriques représentés sur P5.

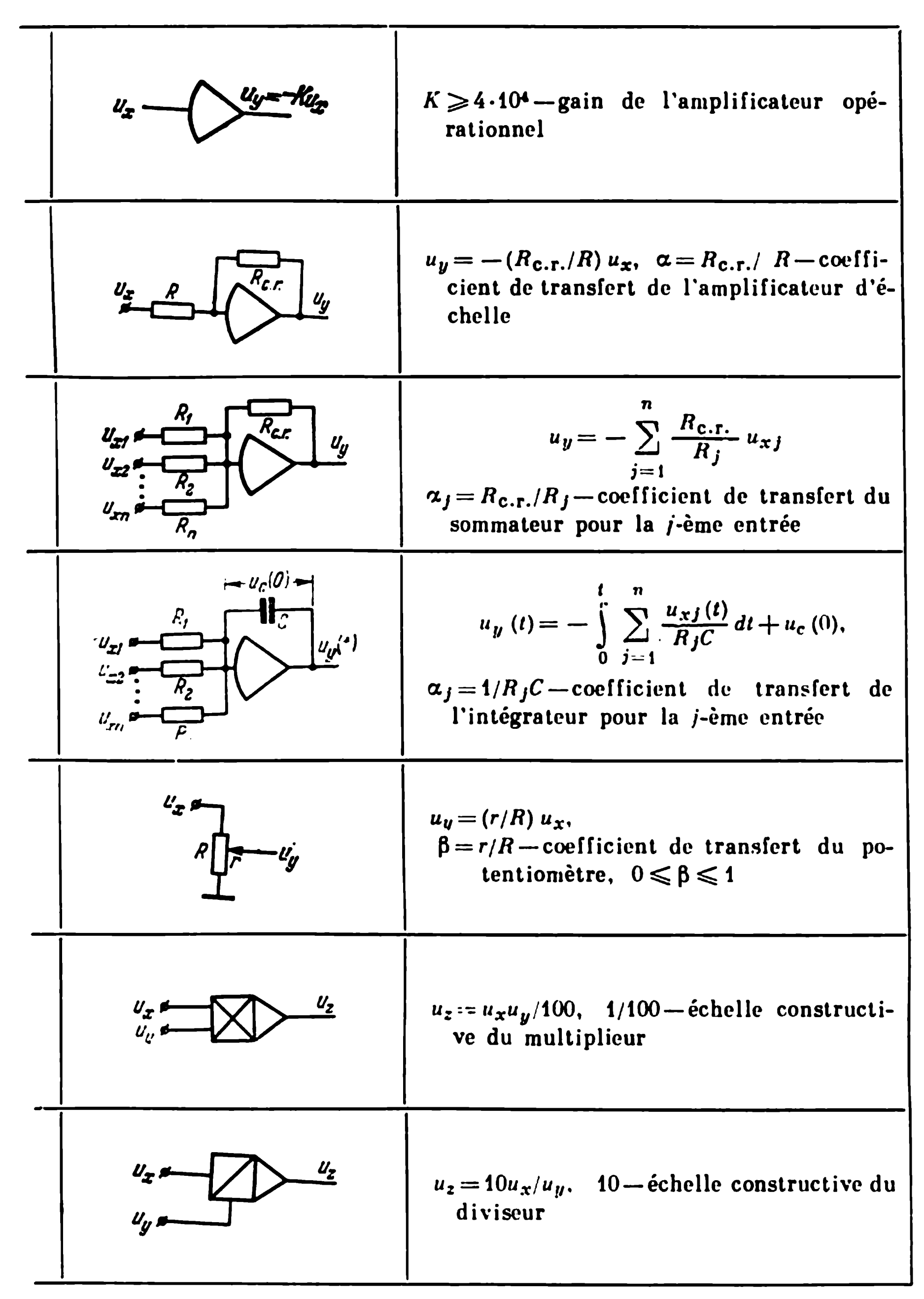
Indications. 1) On suppose que les potentiomètres des circuits de P5 portent tous le même coefficient de transfert α.

2) Les tensions électriques u_1 et u_2 (les variables machine) des circuits électriques de P5 sont assimilées aux variables mathématiques x_1 et x_2 des schémas fonctionnels de P6.

3) La solution de l'exercice 1.2 doit contenir un diagramme de correspondance composé de trois groupes de numéros reliés par des segments orientés de P5 vers P6, puis vers P7.

Amplificateur opérationnel $y = Kx$	x y
Amplificateur d'échelle $y = -\alpha x$	x α y
Sommateur $y = -\sum_{j=1}^{n}{}' \alpha_j x_j$	x_1 x_2 x_n a_1 a_2 a_n y
Intégrateur (sommateur intégrateur) $y = -\int_0^t \sum_{j=1}^{n}{}' \alpha_j x_j(t)\,dt + y(0)$	$y(0)$ x_1 x_2 x_n α_1 α_2 α_n $y(t)$
Potentiomètre $y = \beta x$	x β y
Multiplieur $z = xy$	x y z
Diviseur $z = x/y$	x y z

Fig. 1.1



	$K \geqslant 4 \cdot 10^4$ — gain de l'amplificateur opérationnel
	$u_y = -(R_{c.r.}/R)\, u_x$, $\alpha = R_{c.r.}/R$ — coefficient de transfert de l'amplificateur d'échelle
	$u_y = -\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r.}}{R_j} u_{xj}$ $\alpha_j = R_{c.r.}/R_j$ — coefficient de transfert du sommateur pour la j-ème entrée
	$u_y(t) = -\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{xj}(t)}{R_j C} dt + u_c(0)$, $\alpha_j = 1/R_j C$ — coefficient de transfert de l'intégrateur pour la j-ème entrée
	$u_y = (r/R)\, u_x$, $\beta = r/R$ — coefficient de transfert du potentiomètre, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$
	$u_z = u_x u_y/100$, $1/100$ — échelle constructive du multiplieur
	$u_z = 10 u_x/u_y$, 10 — échelle constructive du diviseur

Fig. 1.1

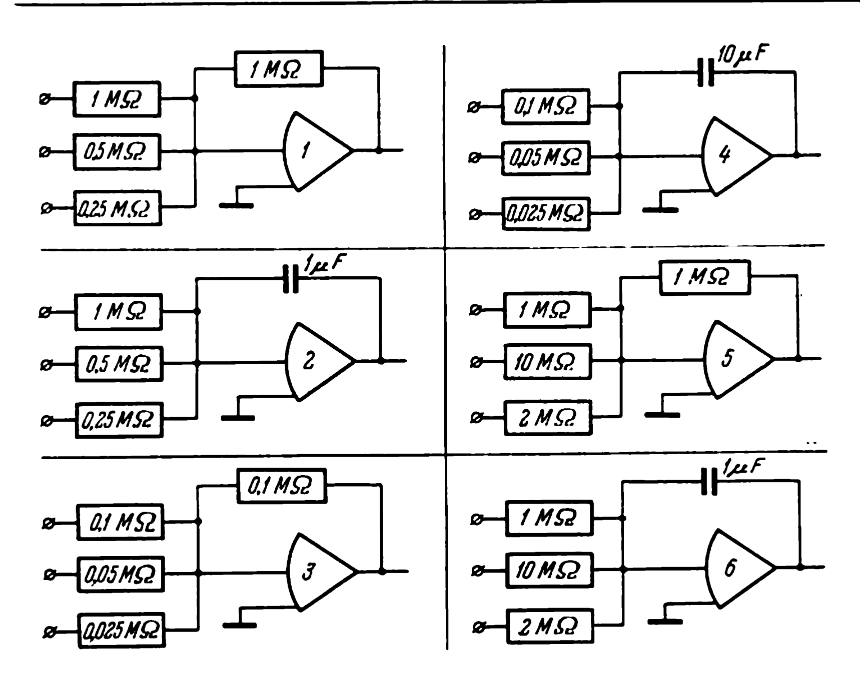


Planche 1

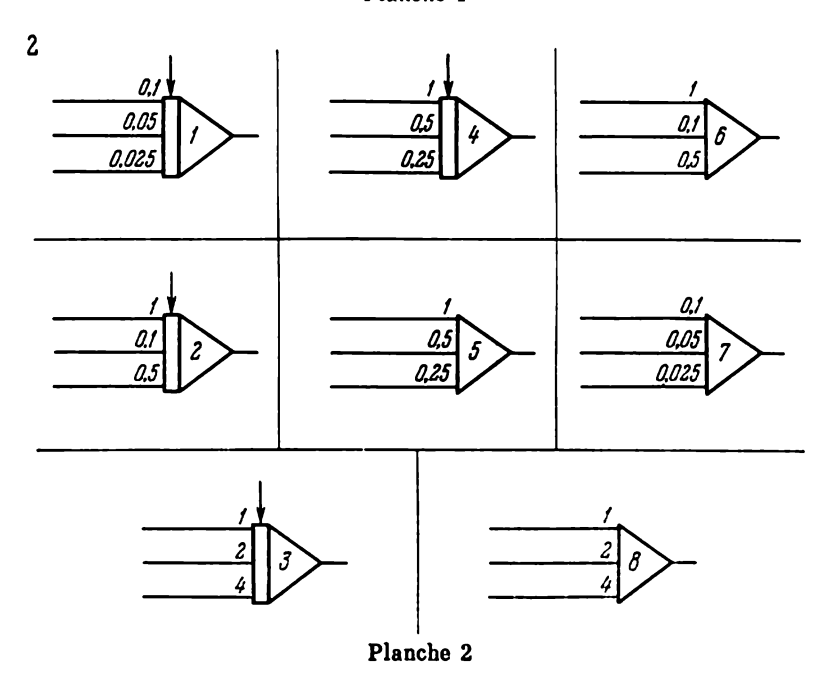


Planche 2

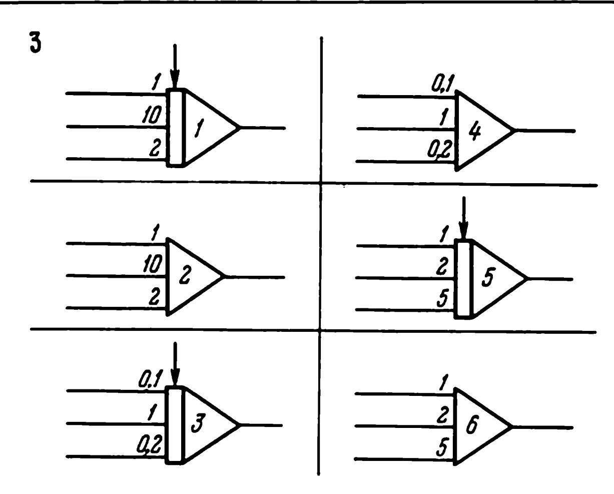


Planche 3

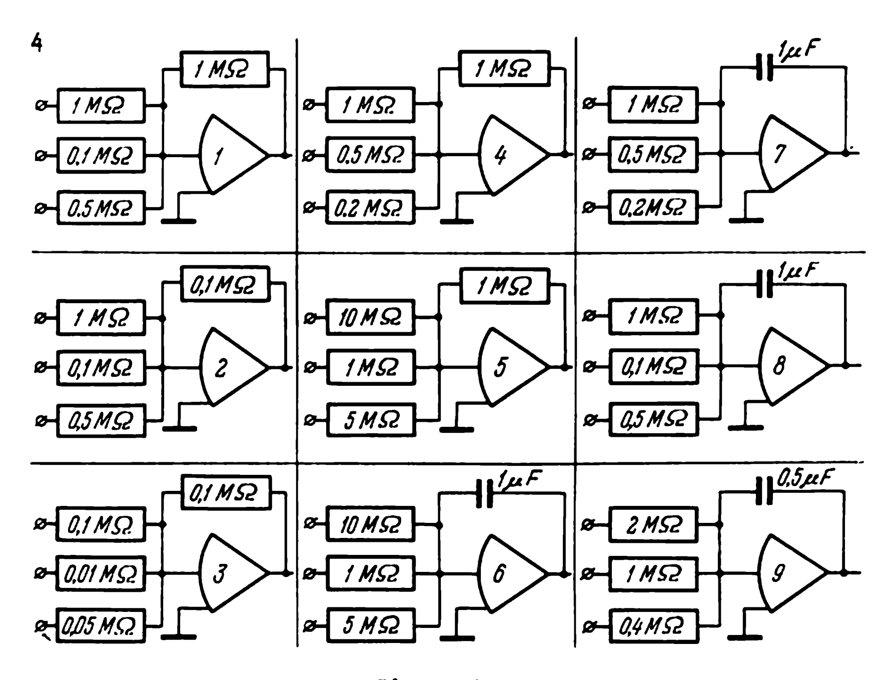


Planche 4

5

u_2 u_1 1 MΩ 1 MΩ 1 0,1 MΩ

u_2 u_1 0,1 MΩ 0,1 MΩ 4 1 MΩ

u_1 1 MΩ 1 MΩ u_2 0,1 MΩ 2 1 MΩ

u_1 0,1 MΩ 0,1 MΩ u_2 1 MΩ 5 1 MΩ

u_1 0,1 MΩ u_2 1 MΩ 3 0,1 MΩ

u_1 1 MΩ u_2 0,1 MΩ 6 1 MΩ

Planche 5

6

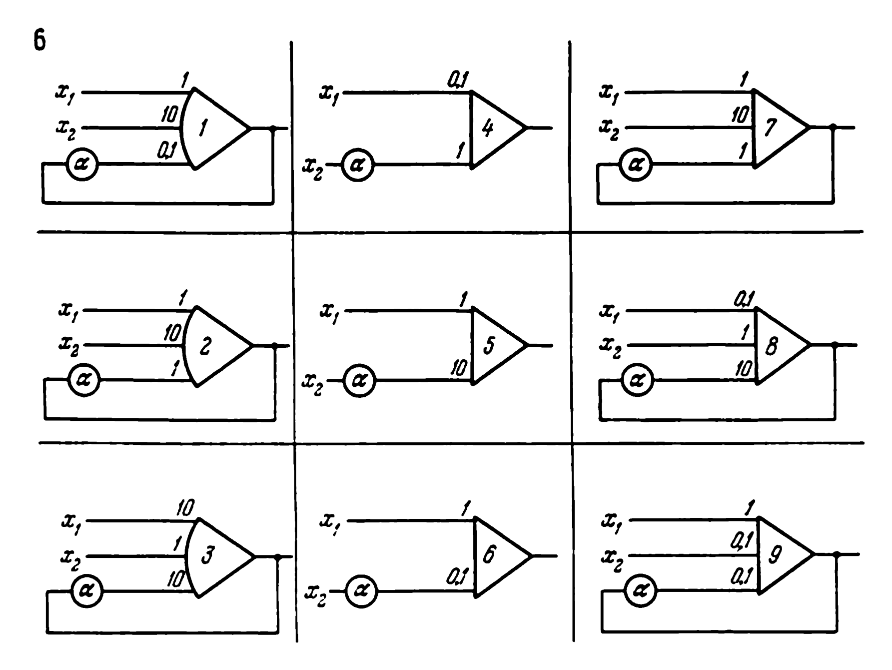


Planche 6

4) Dans certains schémas fonctionnels de P6, l'amplificateur opérationnel (AO) est considéré comme un opérateur isolé. En écrivant les expressions mathématiques délivrées par ces circuits, on ne

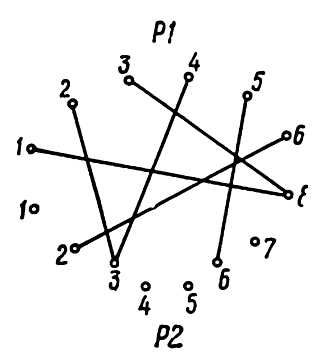


Fig. 1.2

perdra pas de vue l'importante propriété de l'amplificateur opérationnel à contre-réaction, savoir *la somme algébrique des variables d'entrée est nulle.*

7

1 $-\frac{1}{\alpha+1}(x_1+10x_2)$	4 $-\frac{1}{10\alpha}(10x_1+x_2)$	7 $-(x_1+10\alpha x_2)$
2 $-\frac{1}{0{,}1\alpha}(x_1+10x_2)$	5 $-\frac{1}{10\alpha+1}(0{,}1x_1+x_2)$	8 $-(x_1+0{,}1\alpha x_2)$
3 $-\frac{1}{\alpha}(x_1+10x_2)$	6 $-\frac{1}{0{,}1\alpha+1}(x_1+0{,}1x_2)$	9 $-(0{,}1x_1+\alpha x_2)$

Planche 7

Montrons sur un exemple simple comment on peut décrire le fonctionnement d'un circuit en se servant de cette propriété.

Exemple 1.2. Trouver l'expression de la variable z_a, délivrée par le schéma de la figure 1.3, *a*.

Ce schéma met en jeu un AO à contre-réaction par l'intermédiaire d'un potentiomètre de coefficient de transfert β. La propriété formulée entraîne

$$\alpha_1\beta_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3\beta_3z_a = 0.$$

En explicitant z_a, on obtient

$$z_a = -\frac{\alpha_1\beta_1x_1+\alpha_2x_2}{\alpha_3\beta_3}.$$

5) Certains schémas fonctionnels de P6 renferment un sommateur

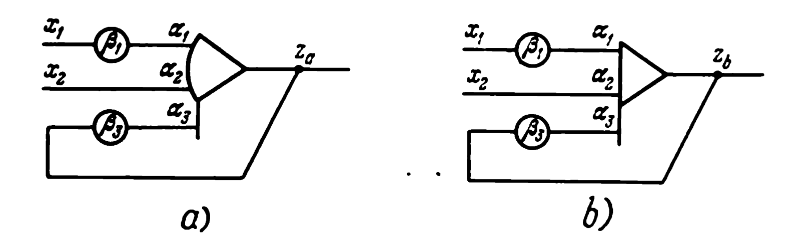


Fig. 1.3

à réaction. Montrons sur un exemple concret comment on trouve l'expression mathématique délivrée par un tel sommateur.

Exemple 1.3. Trouver l'expression de la variable z_b (cf. fig. 1.3, *b*). Le schéma de la figure 1.3, *b* étant celui d'un sommateur, on a $z_b = -(\alpha_1\beta_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3\beta_3z_b)$. En explicitant z_b, on obtient

$$z_b = -\frac{\alpha_1\beta_1x_1+\alpha_2x_2}{1+\alpha_3\beta_3}.$$

Le schéma envisagé câble, comme celui de l'exemple 1.2, le produit d'une somme par un nombre. Dans ce dernier exemple, ce nombre est une fraction propre. Dans l'exemple 1.2, le schéma effectue un produit par le nombre positif $1/\alpha_3\beta_3$.

1.3. Trouver sur P9 les circuits électriques et sur P10 les expressions analytiques correspondant aux schémas fonctionnels de P8 (cf. indications pour l'exercice 1.2).

1.4. Etablir une correspondance entre les expressions analytiques de P11, les schémas fonctionnels de P12 et les circuits électriques de P13 (cf. indications pour l'exercice 1.2).

1.5. Les expressions analytiques de P14 sont réalisées par trois procédés différents (par des sommateurs sur P15, par des sommateurs à réaction sur P16 et par des AO à réaction sur P17). On demande de construire le diagramme de correspondance entre P14, P15, P16 et P17.

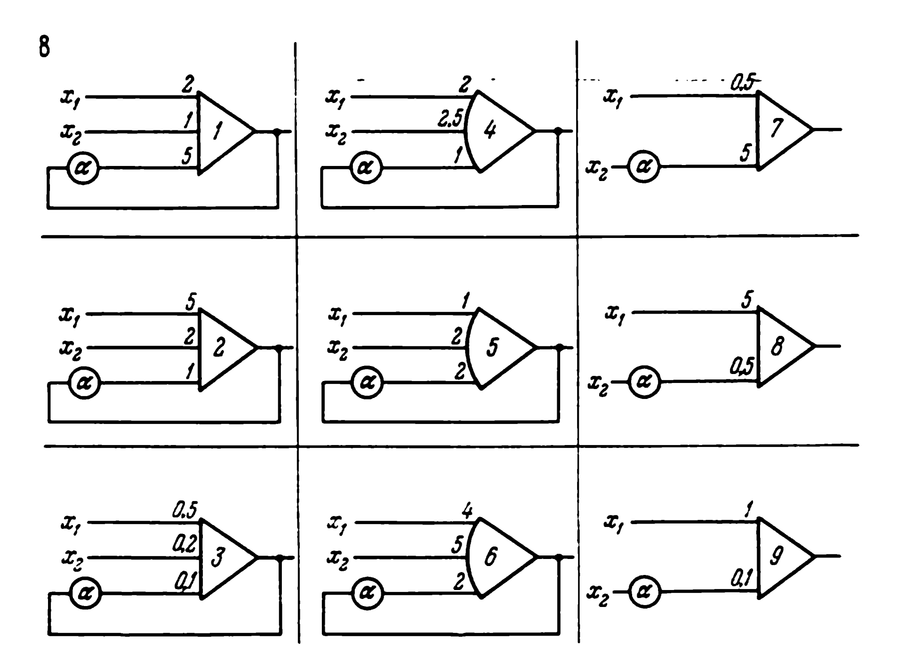


Planche 8

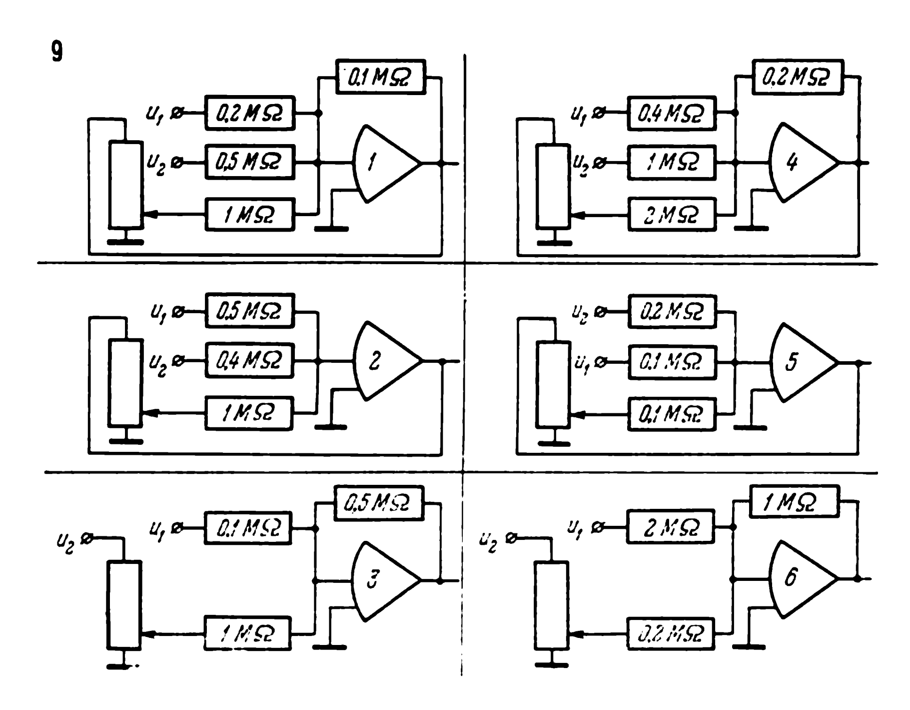


Planche 9

10

1 $-(x_1+0{,}1\alpha x_2)$	4 $-5(x_1+0{,}1\alpha x_2)$	7 $-5(0{,}1x_1+\alpha x_2)$
2 $-\frac{1}{2\alpha}(4x_1+5x_2)$	5 $-\frac{1}{2\alpha}(x_1+2x_2)$	8 $-\frac{1}{\alpha}(2x_1+2{,}5x_2)$
3 $-\frac{1}{0{,}1\alpha+1}(0{,}5x_1+0{,}2x_2)$	6 $-\frac{1}{\alpha+1}(5x_1+2x_2)$	9 $-\frac{1}{5\alpha+1}(2x_1+x_2)$

Planche 10

1 $-(2{,}5x_1+\alpha x_2)$	4 $-(x_1+10\alpha x_2)$	7 $-\frac{5}{\alpha}(2x_1+x_2)$
2 $-2{,}5(x_1+4\alpha x_2)$	5 $-\frac{1}{10\alpha+1}(10x_1+x_2)$	8 $-\frac{1}{0{,}1\alpha}(x_1+x_2)$
3 $-\frac{1}{\alpha+1}(0{,}1x_1+x_2)$	6 $-\frac{1}{\alpha+1}(x_1+x_2)$	9 $-\frac{10}{\alpha}(x_1+x_2)$

Planche 11

I n d i c a t i o n s. 1) Monter trois schémas fonctionnels câblant les expressions analytiques de P14 en utilisant un sommateur, un sommateur à réaction et un AO à réaction.

2) Chercher les schémas analogues dans P15, P16 et P17 et construire le diagramme de correspondance.

3) Choisir entre les schémas fonctionnels réalisant une même expression analytique celui qui semble le plus favorable.

1.6. Trouver les équations différentielles des schémas fonctionnels de P18. Construire le diagramme de correspondance entre P18,

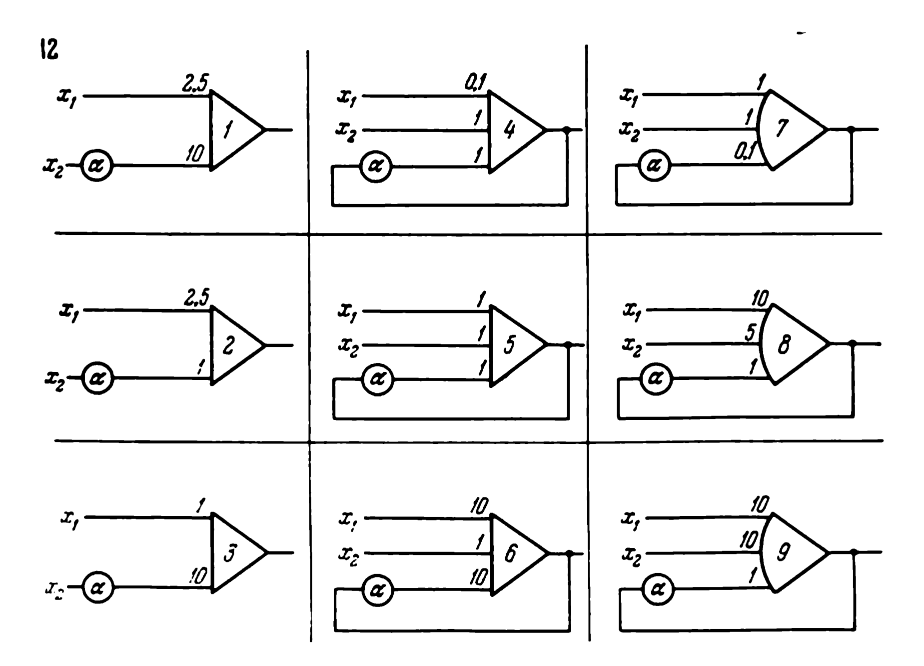


Planche 12

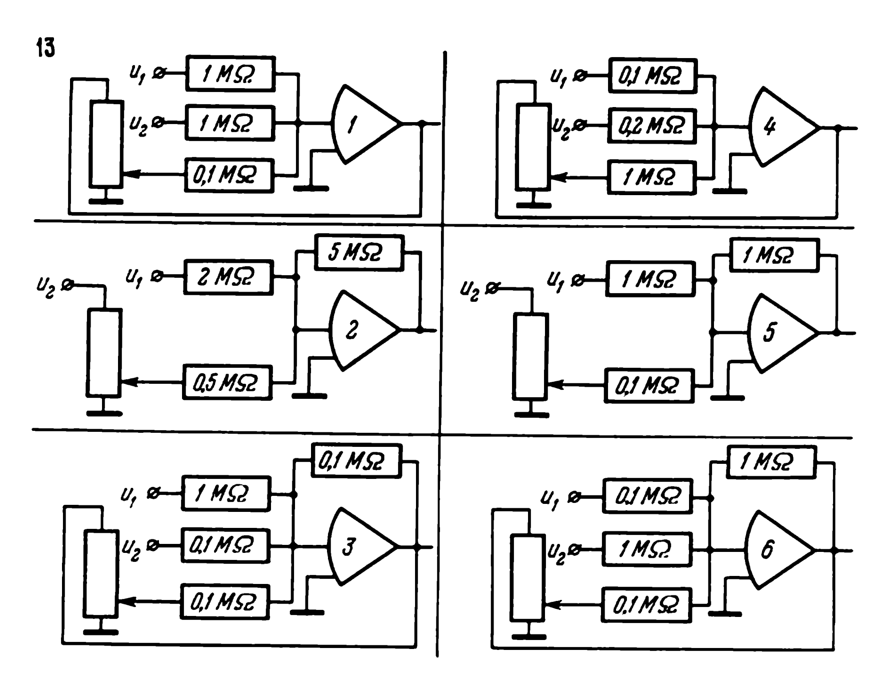


Planche 13

14

1 $-\frac{1}{2}(x_1+x_2)$	4 $-\frac{1}{3}(2x_1+x_2)$	7 $-(x_1+\frac{1}{8}x_2)$
2 $-2(x_1+x_2)$	5 $-(\frac{1}{6}x_1+\frac{1}{3}x_2)$	8 $-(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2)$
3 $-(5x_1+2x_2)$	6 $-(\frac{2}{7}x_1+\frac{5}{7}x_2)$	9 $-(\frac{1}{5}x_1+\frac{1}{2}x_2)$

Planche 14

15

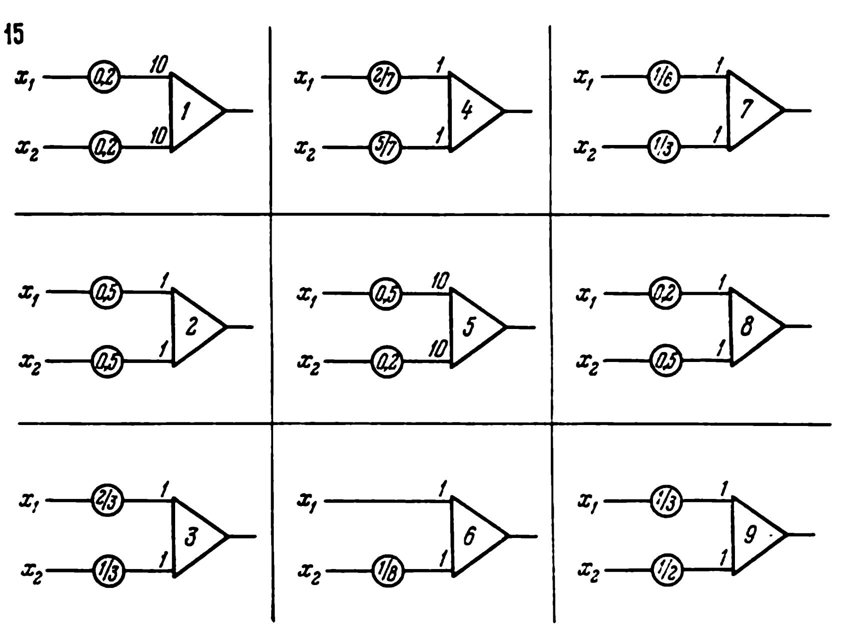


Planche 15

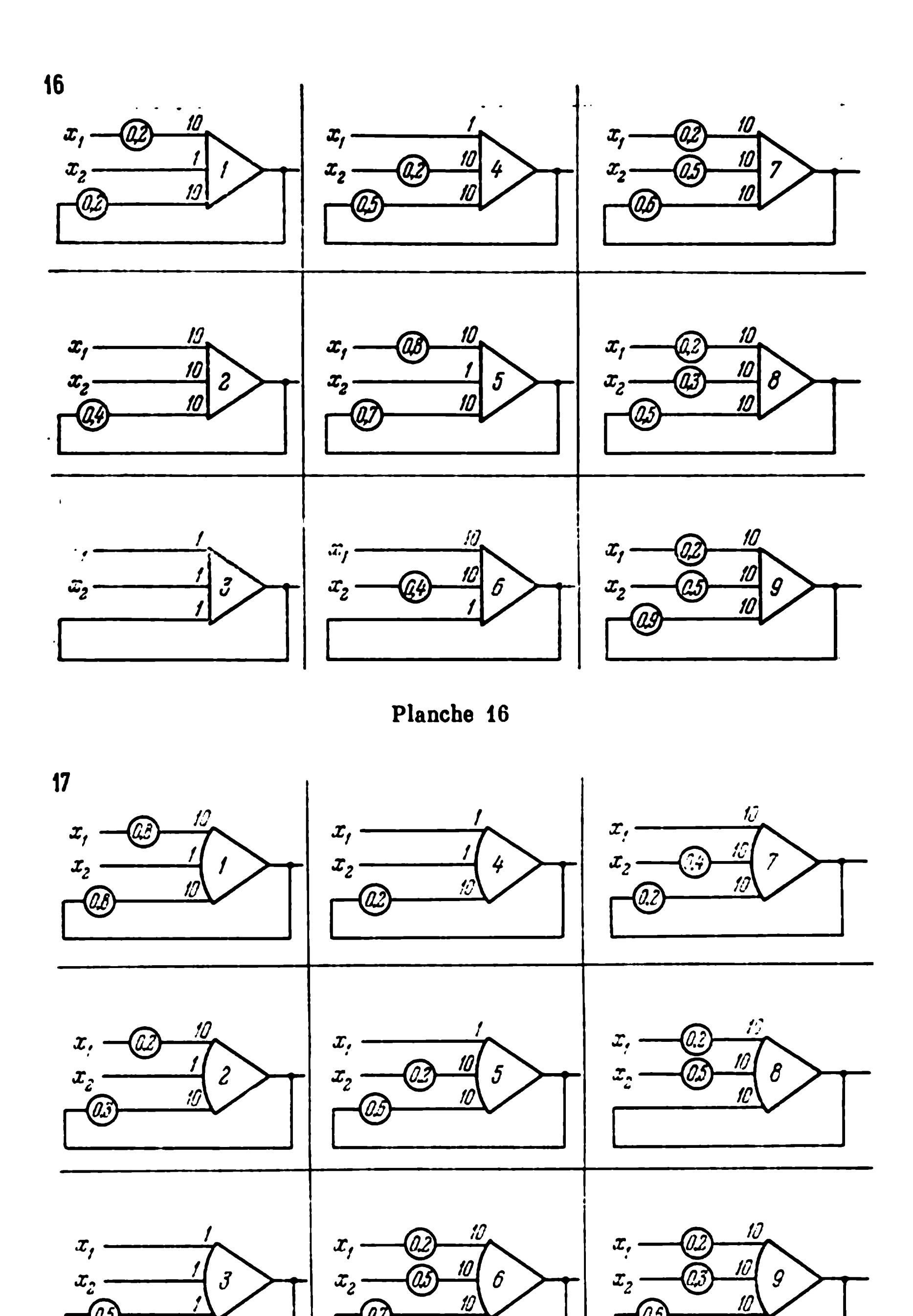


Planche 16

Planche 17

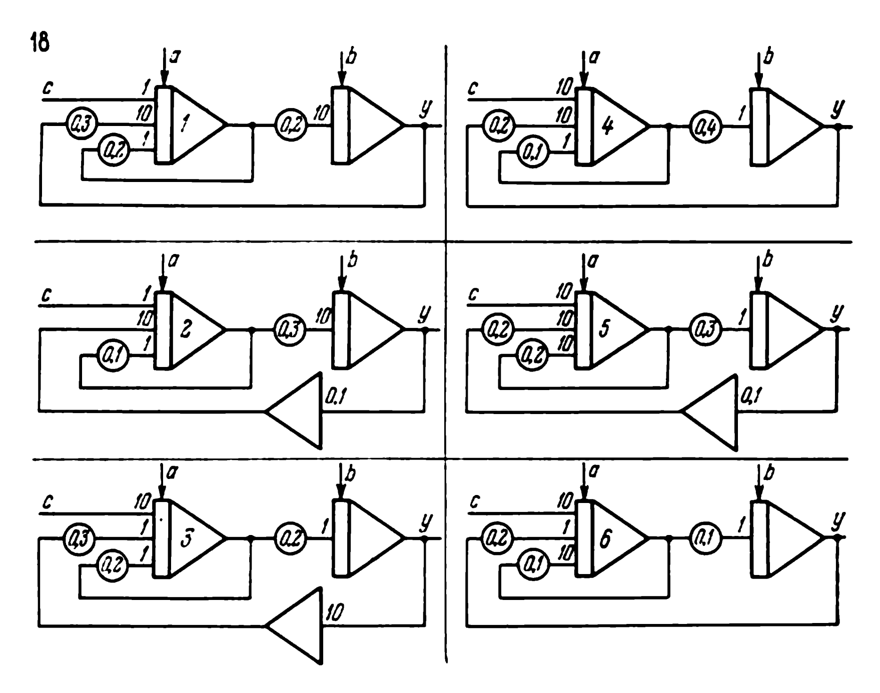


Planche 18

19

1 $y''+0{,}2y'+0{,}06y-3c=0$	4 $y''-0{,}2y'-0{,}2y-2c=0$	7 $y''+0{,}1y'+3y-3c=0$
2 $y''+0{,}1y'-0{,}02y-c=0$	5 $y''+0{,}2y'+0{,}6y-2c=0$	8 $y''-0{,}2y'-0{,}4y-2c=0$
3 $y''+0{,}1y'-0{,}8y-4c=0$	6 $y''+0{,}1y'-3y-c=0$	9 $y''+0{,}2y'-6y-2c=0$

Planche 19

P19 et P20. Les équations différentielles sont données dans P19, la condition initiale y' (0) et les constantes a, b et c, dans P20.

I n d i c a t i o n s. Déduisons l'équation différentielle câblée par le schéma fonctionnel donné.

20

1 $-2a$	4 $-0{,}4a$	7 $-a$
2 $-0{,}3a$	5 $+a$	8 $-3a$
3 $-0{,}1a$	6 $-0{,}2a$	9 $+2a$

Planche 20

Exemple 1.4. Trouver l'équation différentielle câblée par le schéma fonctionnel de la figure 1.4, *a*. Ce schéma comporte le sommateur intégrateur [1], sérié à l'intégrateur [2]. Cette chaîne d'intégrateurs est embrassée par une réaction par l'intermédiaire de l'inverseur [3] et d'un potentiomètre de coefficient de transfert β_2

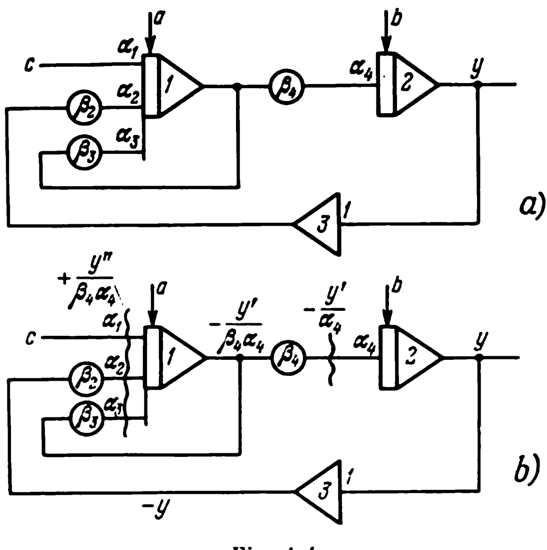


Fig. 1.4

De plus, dans le sommateur intégrateur [1] est réalisée une réaction par l'intermédiaire d'un potentiomètre de coefficient de transfert β_3.

Pour trouver l'équation différentielle cherchée on remontera la chaîne d'intégrateurs, i.e. on ira de la sortie de l'intégrateur [2], qui débite la variable $y(t)$, aux entrées du sommateur intégrateur [1] (fig. 1.4, *b*). L'opérateur [2] est un intégrateur qui ne délivrera la variable $y(t)$ que s'il reçoit la variable $-y'(t)/\alpha_4$, α_4 étant son coefficient de transfert. Or la variable $-y'(t)/\alpha_4$ est élaborée à son tour à la sortie du potentiomètre de coefficient de transfert β_4, donc à l'entrée de ce dernier est appliquée la variable $-\frac{y'(t)}{\alpha_4\beta_4}$, laquelle provient du sommateur intégrateur [1]. On peut donc affirmer (en décomposant mentalement les opérations de sommation et d'intégration réalisées par le sommateur intégrateur) que dans la section verticale des entrées du sommateur intégrateur [1], on aura la variable $\frac{y''(t)}{\alpha_4\beta_4}$ à droite, et la somme

$$c\alpha_1-\frac{\alpha_3\beta_3}{\alpha_4\beta_4}y'(t)-\alpha_2\beta_2y(t)$$

qui lui est égale à gauche, soit

$$\frac{y''(t)}{\alpha_4\beta_4}=c\alpha_1-\frac{\alpha_3\beta_3}{\alpha_4\beta_4}y'(t)-\alpha_2\beta_2y(t).$$

Toutes réductions faites, on obtient l'équation différentielle

$$y''(t)+\alpha_3\beta_3y'(t)+\alpha_2\alpha_4\beta_2\beta_4y(t)-\alpha_1\alpha_4\beta_4c=0.$$

La détermination de la valeur initiale de la variable $y(t)$ est aisée, car $y(0)=b$. Lorsqu'on cherchera la valeur initiale de $y'(t)$, on ne perdra pas de vue que le sommateur intégrateur [1] délivre la variable $-\frac{y'(t)}{\alpha_4\beta_4}$ (et non $-y'(t)$) qui pour $t=0$ est égale à a, d'où $y'(0)=-\alpha_4\beta_4a$. Pour les schémas de la figure 1.4, on a en définitive

$$y''(t)+\alpha_3\beta_3y'(t)+\alpha_2\alpha_4\beta_2\beta_4y(t)-\alpha_1\alpha_4\beta_4c=0,$$
$$y'(0)=-\alpha_4\beta_4a,\quad y(0)=b.$$

1.7. On demande les équations différentielles câblées par les schémas fonctionnels de P21. Trouver la valeur initiale $y'(0)$ de la variable $y'(t)$. Construire le diagramme de correspondance à l'aide des schémas de P21, P22, P23 (cf. indications pour l'exercice 1.6).

1.8. On demande les systèmes d'équations différentielles dont les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont réalisées par les schémas fonctionnels de P24. Construire le diagramme de correspondance entre P24 et P25.

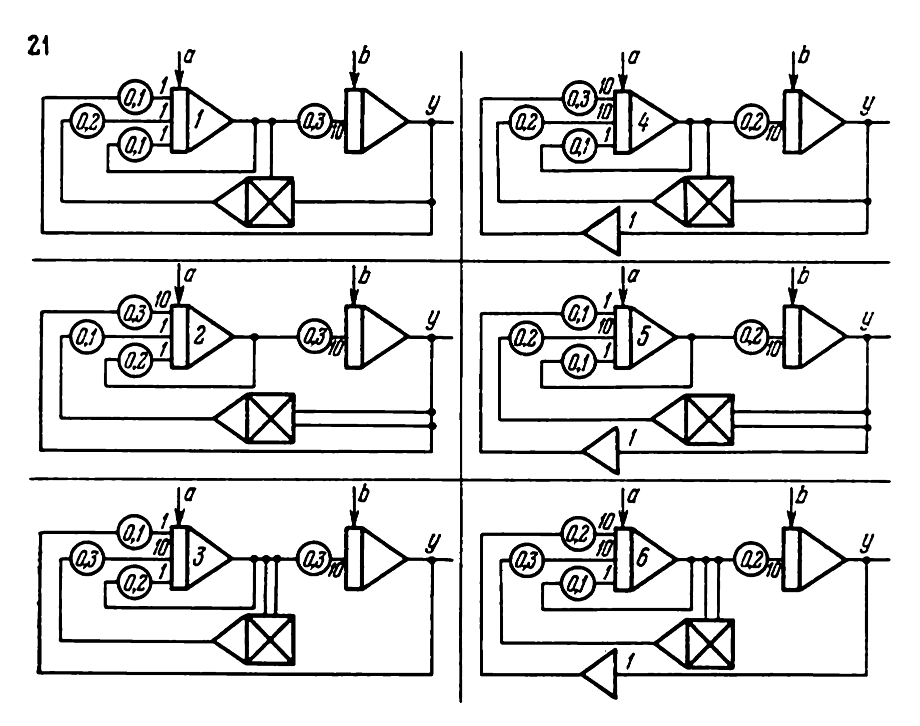


Planche 21

22

1 $y''+0{,}2y'-(y')-0{,}3y=0$	4 $y''+0{,}2y'-9y-0{,}3y^2=0$	7 $y''-0{,}1y'-0{,}2y-4y^2=0$
2 $y''+0{,}1y'+0{,}2y'y-0{,}3y=0$	5 $y''-0{,}2y'+9y-0{,}2y^2=0$	8 $y''+0{,}1y'-1{,}5(y')^2+4y=0$
3 $y''-0{,}1y'+0{,}3y'y-0{,}3y=0$	6 $y''+0{,}1y'+0{,}2y-4y^2=0$	9 $y''+0{,}1y'+2y'y+6y=0$

Planche 22

1.9. Trouver les équations différentielles câblées par les schémas fonctionnels de P26. Construire le diagramme de correspondance entre P26 et P27.

I n d i c a t i o n. Se servir de la propriété de l'amplificateur opérationnel à contre-réaction pour composer l'équation différentielle.

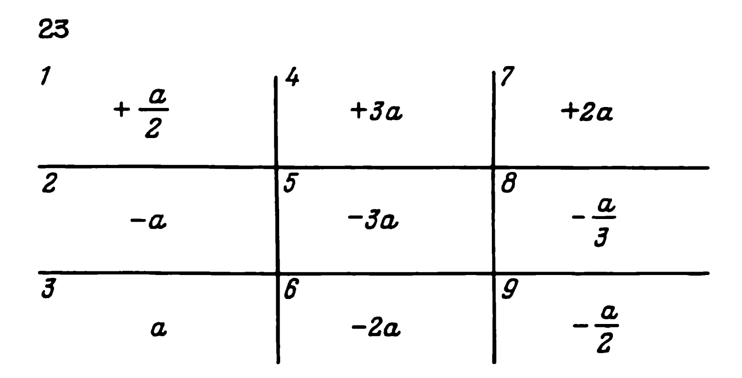


Planche 23

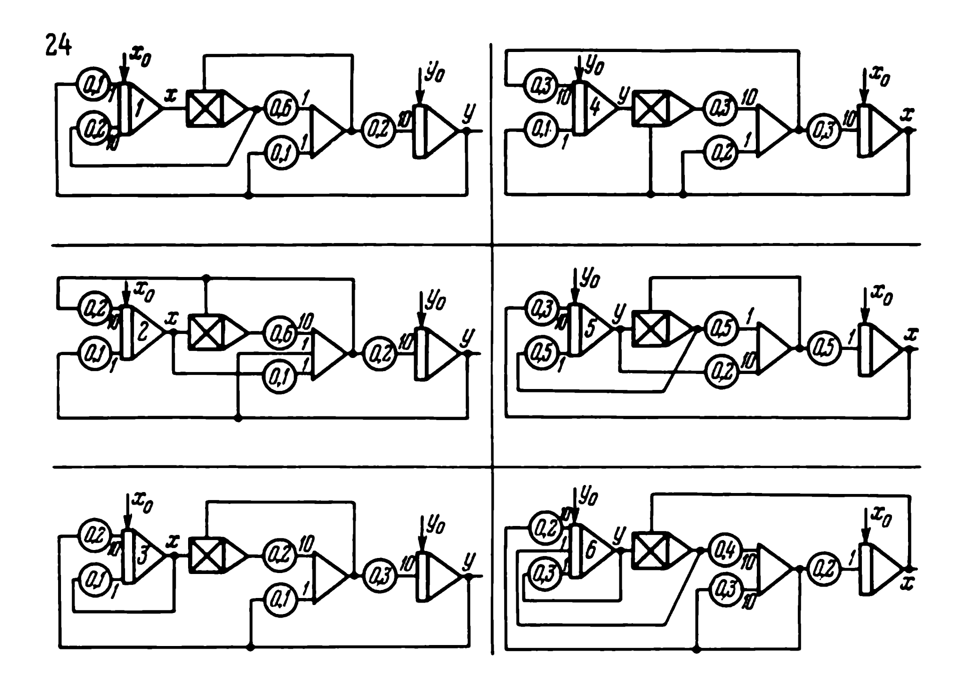


Planche 24

1.10. On demande les équations différentielles câblées par les schémas fonctionnels de P28. Construire le diagramme de correspondance entre P28, P19 et P18.

25

1 $x'-9xy-0{,}2x=0$ $y'-x'+0{,}3x=0$	4 $x'+6xy'-y-0{,}2x=0$ $y'-6xy'-2y-0{,}2x=0$	7 $x'-0{,}2xy=0$ $y'-10x'+xy+0{,}3y=0$
2 $x'-9xy-0{,}2x=0$ $y'-9xy+0{,}1x=0$	5 $x'-0{,}2xy=0$ $y'-xy+0{,}3y=0$	8 $x'+0{,}1x+2y=0$ $y'+2xy'-0{,}3y=0$
3 $x'-xy'+0{,}1y=0$ $y'+0{,}6xy'-0{,}2y=0$	6 $x'-y'+y=0$ $y'+6xy'-2y-0{,}2x=0$	9 $x'+0{,}5yx'+4y=0$ $y'-yx'+3x=0$

Planche 25

26

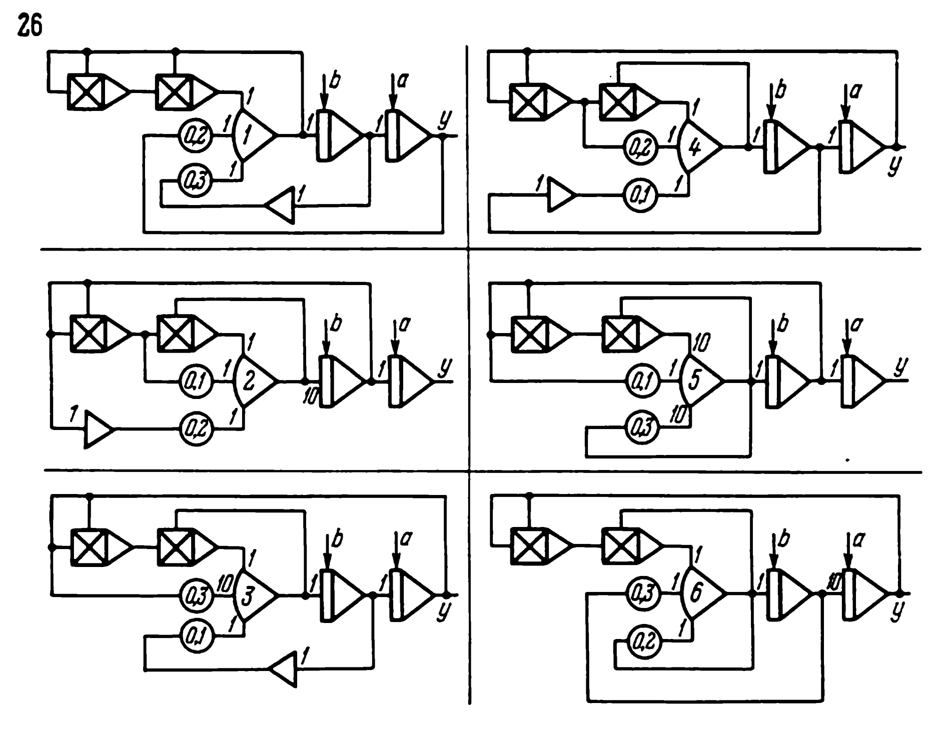


Planche 26

27

1 $y''(y')^2+(y')^2+2y'=0$	4 $y''y^2+0{,}1y'+3y=0$	7 $(y'')^3+0{,}3y'+0{,}2y=0$
2 $-y''(y^2+1)+0{,}3y'=0$	5 $0{,}01y'-y''[(y')^2+0{,}3]=0$	8 $0{,}1y'-y^2(y''+0{,}2)=0$
3 $y''y^2+y''-0{,}3y'=0$	6 $y''y^2-0{,}1y'+0{,}2y^2=0$	9 $10y''(y')^2+3y''-0{,}1y'=0$

Planche 27

28

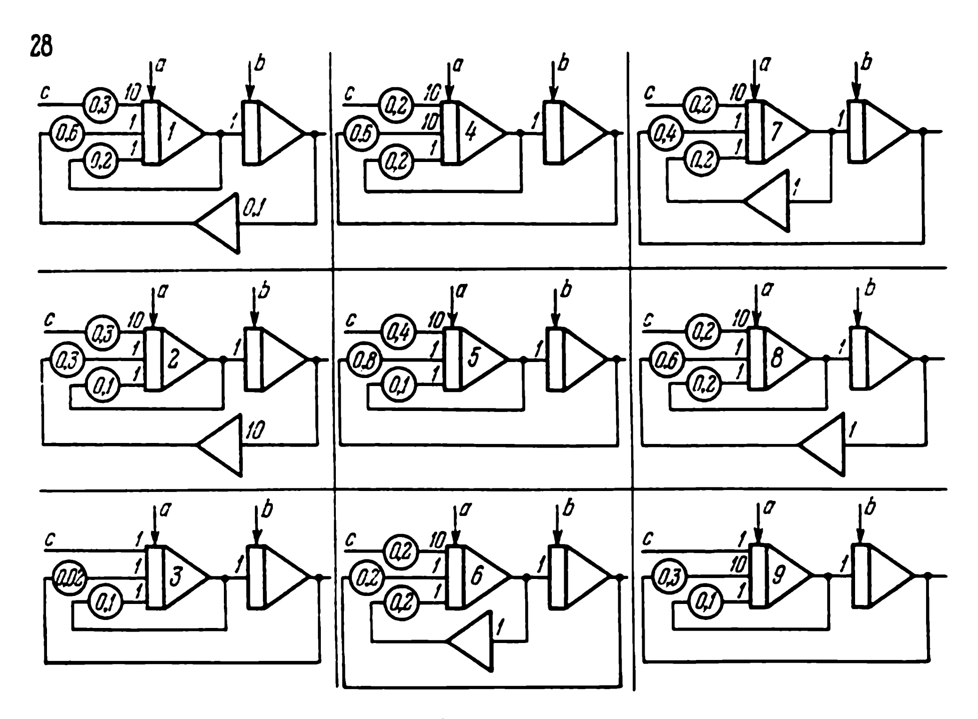


Planche 28

1.11. Composer les équations différentielles câblées par les schémas fonctionnels de P29. Construire le diagramme de correspondance entre P29, P22, P21.

1.12. La figure 1.5 représente trois couples de schémas fonctionnels donnant respectivement les solutions d'équations du second, du troisième et du quatrième ordre. Montrer que chaque couple de

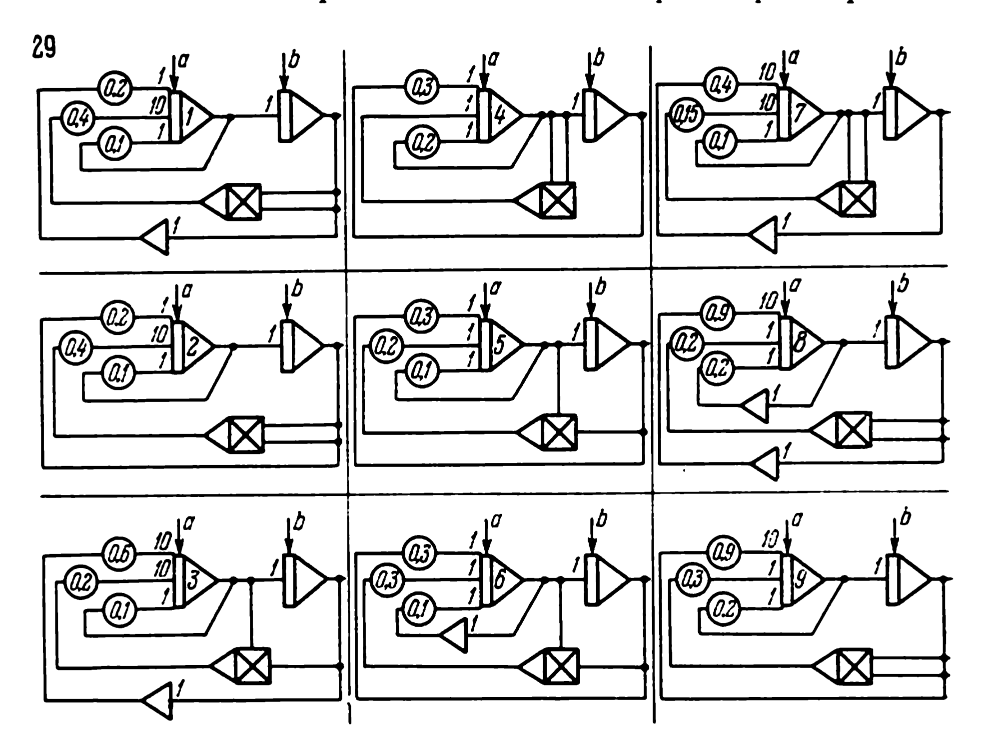


Planche 29

schémas fonctionnels résout la même équation différentielle malgré la différence de structure. Trouver les conditions remplies par a, b, c, d et a^*, b^*, c^*, d^* pour que chaque couple de schémas réalise les mêmes solutions particulières des équations différentielles.

1.13. La figure 1.6 représente quatre schémas fonctionnels. Trouver les équations différentielles résolues; résoudre ces équations analytiquement et étudier l'influence sur $\lim_{t\to\infty} y_j(t)$ $(j = 1, \ldots, 4)$ des erreurs ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 commises pendant l'initialisation des intégrateurs; montrer que lorsque $\varepsilon_j = 0$ $(j = 1, \ldots, 4)$, on a $y_j(t) = \exp(-t)$ $(j = 1, \ldots, 4)$; interpréter les résultats obtenus

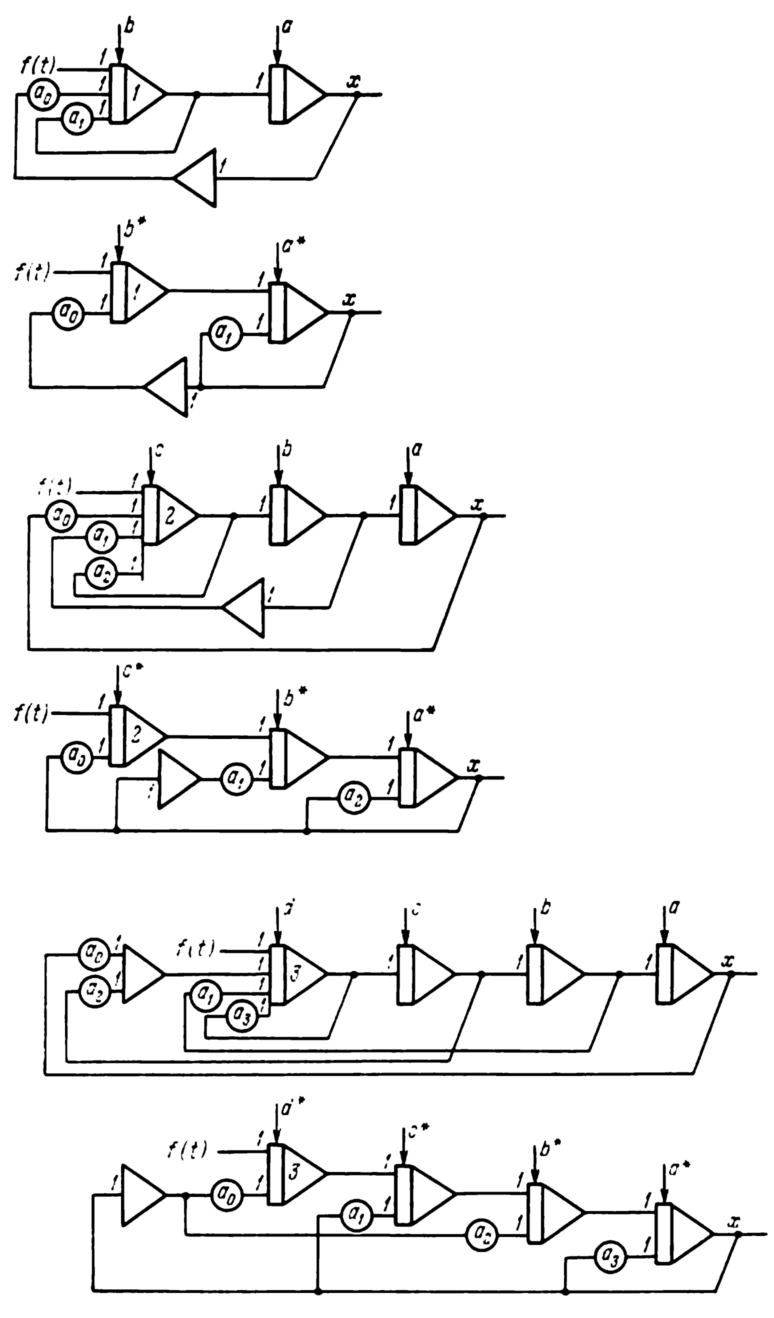


Fig. 1.5

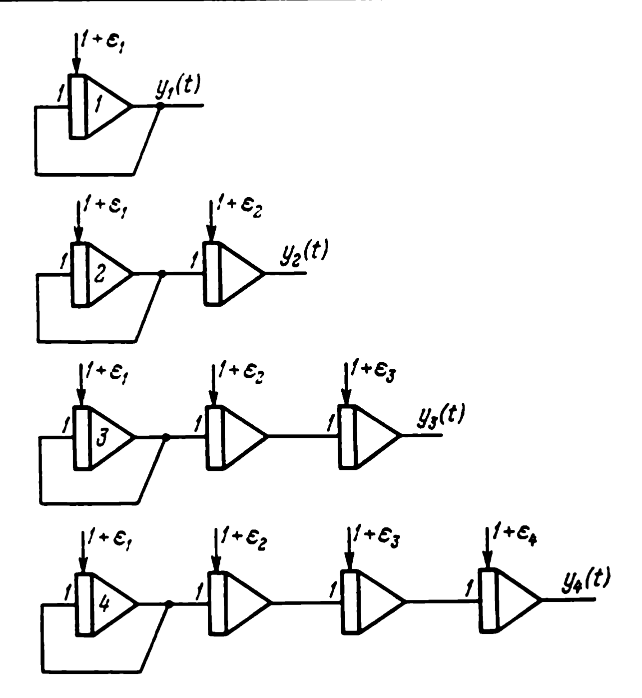


Fig. 1.6

en faisant intervenir la notion de « stabilité des solutions des équations différentielles ».

1.14. Trouver l'équation différentielle réalisée par le schéma de la figure 1.7.

Montrer en résolvant analytiquement l'équation obtenue que:

1) si $z(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{x(t)}{z(t)}$ indépendamment de la condition initiale y_0 et la vitesse de convergence croît avec ρ;

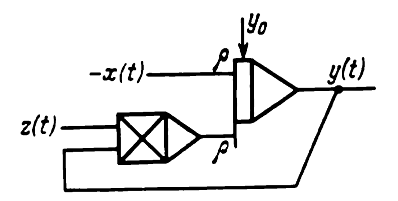


Fig. 1.7

2) si $z(t) < 0$, la quantité $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ est infinie.

Les multiplieurs de nombreux calculateurs analogiques sont construits sur la base du schéma de la figure 1.7.

CHAPITRE 2

EXERCICES DE PROGRAMMATION DES CALCULATEURS ANALOGIQUES

§ 1. Résolution d'équations différentielles ordinaires

EXEMPLE 2.1. Monter un schéma fonctionnel donnant la solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad (2.1)$$

qui vérifie les conditions initiales

$$y'(0) = y'_0, \quad y(0) = y_0.$$

Suivant la méthode générale *), la mise au point d'un schéma fonctionnel résolvant cette équation différentielle comporte six étapes.

Première étape. On résout l'équation (2.1) par rapport à la dérivée supérieure

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t). \qquad (2.2)$$

Deuxième étape. On représente une chaîne d'intégrateurs montés en série dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation. Ici cette chaîne comporte deux intégrateurs (fig. 2.1, *a*).

Troisième étape. On applique mentalement la dérivée supérieure $y''(t)$ à l'entrée de la chaîne et on note de gauche à droite les variables de sortie des intégrateurs (fig. 2.1, *b*). D'où que la variable $y''(t)$ provienne (nous laisserons ce problème de côté pour l'instant), on aura la variable $-y'(t)$ à la sortie de l'intégrateur [1] et la variable $y(t)$ à la sortie de l'intégrateur [2].

Quatrième étape. On construit le schéma fonctionnel qui réalise le second membre de l'équation (2.2) sous réserve qu'il existe un opérateur générant la fonction $f(t)$, second membre de l'équation (2.1). Ce schéma est représenté en traits pleins sur la figure 2.1, *c*. Il comporte l'inverseur [1], le sommateur [2] et un générateur de la fonction donnée $-f(t)$. Le sommateur [2] délivre le second membre de l'équation différentielle (2.2)

$$-a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t).$$

---

*) Voir A. Ourmaev, *Eléments de simulation sur calculateurs analogiques*, Mir, 1978, à partir du chapitre 5.

Cinquième étape. La sortie du sommateur [2] est appliquée à l'entrée de l'intégrateur [1] (fig. 2.1, *d*). Mathématiquement cela veut dire que le second membre de l'équation (2.2) est égal au premier.

Sixième étape. On donne les conditions initiales aux intégrateurs en tenant compte des variables de sortie de ces derniers (fig. 2.1, *e*).

R e m a r q u e s. 1) Le schéma de la figure 2.1, *e* génère les variables $y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$ que l'on peut étudier avec les techniques du calcul analogique. Si la variable $y''(t)$ ne présente pas d'intérêt

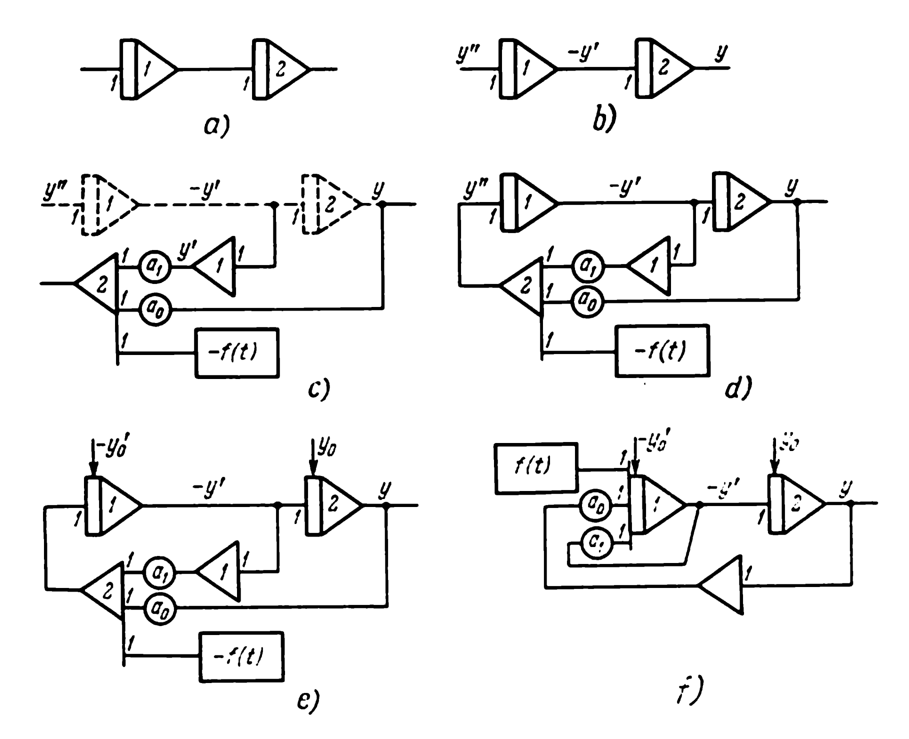


Fig. 2.1

pour le problème posé, le schéma 2.1, *e* peut être grandement simplifié par groupement des fonctions du sommateur [2] et de l'intégrateur [1] en un sommateur intégrateur comme le montre la figure 2.1, *f*. Ceci permet de réaliser une économie d'opérateurs mais en revanche réduit l'information sur la solution, car la variable $y''(t)$ est éliminée du schéma.

2) Une fois que le schéma est construit, nous devons nous assurer que la machine reproduira correctement $y(t)$. Pour contrôler le fonctionnement de la machine on fait appel à des relations de contrôle. Dans l'exemple envisagé, pour relation de contrôle on peut

prendre l'équation différentielle initiale sous la forme suivante: $y'' + a_1y' + a_0y - f(t) = 0$. Le premier membre est une somme de quatre variables. Sa réalisation implique un seul sommateur à quatre entrées. Ces variables sont élaborées par le schéma de la figure 2.1, *e* et leur sommation avec le schéma de la figure 2.2 ne présente aucune difficulté. A la sortie du sommateur de contrôle est branché un

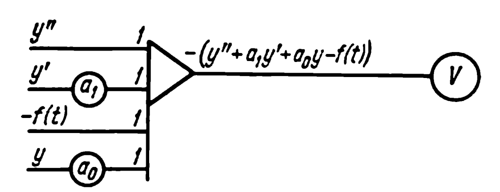


Fig. 2.2

voltmètre qui devrait indiquer le zéro si la machine fonctionne normalement, le schéma est correct et les coefficients de transfert exacts.

2.1. Construire les schémas fonctionnels des équations différentielles linéaires représentées sur P19. Construire le diagramme de correspondance entre P19 et P28.

2.2. Construire les schémas fonctionnels des équations différentielles non linéaires représentées sur P22. Construire le diagramme de correspondance entre P22 et P29.

2.3. Construire les schémas fonctionnels des équations différentielles linéaires et des systèmes d'équations différentielles linéaires suivants:

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2) $2y'' + 5y' + 2y = 0$.
3) $y'' + 2y' + 10y = 0$.
4) $y''' - 8y = 0$.
5) $y^{IV} - 8y = 0$.
6) $y'' + 2y' + y = 0$.
7) $y^{V} + 6y^{IV} + 6y''' = 0$.
8) $y^{IV} + 8y'' + y = 0$.
9) $y''' + y'' - y' + y = 0$.
10) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.
11) $y^{IV} + 4y'' + 3y' = 0$.
12) $y'' + y' - 2y = 0$.
13) $y'' + 2y' = 0$.
14) $y'' + 4y = 0$.
15) $y'' + 4y' + 5y = 0$.
16) $y^{IV} - y = 0$.
17) $y^{VI} + y = 0$.
18) $4y'' + 4y' + y = 0$.
19) $y^{V} - 10y''' + 3y' = 0$.
20) $y''' + 3y'' + 3y' - y = 0$.
21) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
22) $y'' - 3y' + 2y = 0$.
23) $x'' = +3y' + 2y$,
    $y'' = -3x' - 2x$.
24) $x' + x - 8y = 0$,
    $y' - x + y = 0$.

25) $x' = -x + 3y,$
$y' = 3x - y.$

26) $x' = 2x + y,$
$y' = 4y - x.$

27) $x' = 2y - 3x,$
$y' = y - 2x.$

28) $x' = x + z - y,$
$y' = x + y - z,$
$z' = 2x + y.$

29) $x' = x - y,$
$y' = y - 4x.$

30) $x' = x + y,$
$y' = 3y - 2x.$

31) $x' + x + 5y = 0,$
$y' - x - y = 0.$

32) $x' = 3x - y,$
$y' = 4x - y.$

33) $x' - 5x - 3y = 0,$
$y' + 3x + y = 0.$

34) $x' = x - 2y - z,$
$y' = y - x + z,$
$z' = x - z.$

35) $x' = 3x - y + z,$
$y' = x + y + z,$
$z' = 4x - y + 4z.$

36) $x' = 2x - y + z,$
$y' = x + 2y - z,$
$z' = x - y + 2z.$

37) $x' = 4y - 2z - 3x,$
$y' = z + x,$
$z' = 6x - 6y + 5z.$

38) $x' = 2x + y,$
$y' = x + 3y - z,$
$z' = 2y + 3z - x.$

39) $x' = 4x - y - z,$
$y' = x + 2y - z,$
$z' = x - y + 2z.$

40) $x' = y - 2x - 2z,$
$y' = x + 2y - z,$
$z' = 2y + 3z - x.$

41) $x' = x - y + z,$
$y' = x + y - z,$
$z' = 2z - y.$

42) $x' = 2x + y,$
$y' = 2y + 4z,$
$z' = x - z.$

43) $x' = 4x - y,$
$y' = 3x + y - z,$
$z' = x + z.$

44) $x' = x - y - z,$
$y' = x + y,$
$z' = 3x + z.$

45) $x' = 2x + 2x - y,$
$y' = x + 2z,$
$z' = y - 2x - z.$

46) $x' = 2x - y - z,$
$y' = 3x - 2y - 3z,$
$z' = 2z - x + y.$

47) $x' = 3x - 2y - z,$
$y' = 3x - 4y - 3z,$
$z' = 2x - 4y.$

48) $x' = y - 2z - x,$
$y' = 4x + y,$
$z' = 2x + y - z.$

49) $x' = 2x - y - z,$
$y' = 2x - y - 2z,$

$z' = 2z - x + y.$

50) $x'' = 2x - 3y,$

$y'' = x - 3y.$

51) $x'' = 2y,$

$y'' = -2x.$

52) $x' = -y - z,$

$y' = -x - z,$

$z' = -x - y.$

53) $x' = y + z,$

$y' = 3x + z,$

$z' = 3x + y.$

2.4. Construire les schémas fonctionnels des systèmes d'équations différentielles représentés sur P25. Construire le diagramme de correspondance entre P25 et P24.

EXEMPLE 2.2. Mettre au point un schéma fonctionnel de l'équation non résolue par rapport à la dérivée supérieure:

$$y''(y')^2 + ay' + by = 0. \tag{2.3}$$

Moyennant une augmentation de l'ordre de l'équation (2.3), on obtient l'expression explicite

$$y''' = -\rho\,[y''(y')^2 + ay' + by]\operatorname{sign}[(y')^2],$$

où ρ est un grand nombre positif.

En définitive on obtient l'équation différentielle du troisième ordre résolue par rapport à la dérivée supérieure

$$y''' = -\rho\,[y''(y')^2 + ay' + by]. \tag{2.4}$$

L'application de la méthode générale ne présente aucune difficulté.

Remarque. D'une façon générale, les équations (2.3) et (2.4) ne sont pas équivalentes. Au mieux on ne peut parler que de l'équivalence asymptotique de leurs solutions. Se référer aux « Eléments de simulation sur calculateurs analogiques » pour plus de détails.

2.5. Construire les schémas fonctionnels des équations différentielles représentées sur P27. Construire le diagramme de correspondance entre P27 et P26. Indiquer la fonction de l'amplificateur opérationnel dans les schémas de P26.

§ 2. Génération de fonctions données

On a à générer des fonctions données d'une variable indépendante lorsqu'on résout des équations différentielles à seconds membres, à coefficients variables et à non-linéarités spéciales. Par ailleurs la génération d'une fonction peut présenter de l'intérêt en soi, lorsqu'il est nécessaire d'étudier cette fonction avec les techniques du calcul analogique: tracé du graphe, recherche des points d'extremum, d'inflexion, des zéros, etc.

La méthode de génération de cette fonction s'appelle *méthode des équations différentielles déterminantes*. Une équation différentielle

est déterminante pour une fonction donnée $y(t)$ si $y(t)$ en est solution. La recherche de l'équation déterminante pour une fonction donnée se ramène à une dérivation successive de cette fonction et à l'établissement d'une relation entre les diverses dérivées.

EXEMPLE 2.3. Composer le programme complet *) de génération de la fonction $y = t \exp(-t)$.

La programmation comporte plusieurs étapes distinctes.

1) Déduction de l'équation différentielle déterminante. Une dérivation successive de la fonction $y = t \exp(-t)$ donne

$$y' = -t \exp(-t) + \exp(-t)$$

ou

$$y' = -y + \exp(-t); \tag{2.5}$$

$$y'' = t \exp(-t) - 2 \exp(-t)$$

ou

$$y'' = -y' - \exp(-t). \tag{2.6}$$

En ajoutant les équations (2.5) et (2.6) on obtient l'équation différentielle déterminante cherchée:

$$y'' = -2y' - y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{2.7}$$

Les valeurs numériques des conditions initiales s'obtiennent par report de $t = 0$ dans l'expression de la fonction et de ses dérivées.

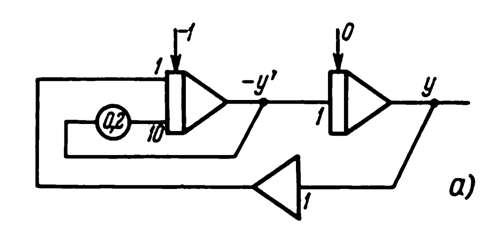
2) Schéma fonctionnel. Le schéma fonctionnel est composé pour les variables mathématiques. Il n'est orienté sur aucune machine concrète. On dit que le schéma fonctionnel est banalisé. Le schéma fonctionnel exprime le principe de commutation des opérateurs en un système de calcul simulant le problème posé. Ainsi l'équation (2.7) est câblée par le schéma fonctionnel de la figure 2.3, *a* qui est composé d'après la méthode générale.

3) *Adaptation des échelles.* Les variables mathématiques sont assimilées en calcul analogique à des tensions électriques par l'intermédiaire de coefficients dimensionnés appelés *échelles.* Il faut choisir l'échelle des seules variables mathématiques qui sont données explicitement sur le schéma fonctionnel, i.e. sont délivrées à la sortie d'un amplificateur opérationnel quelconque, dans notre cas, les variables y et y'. On ne touchera pas à la variable y'' puisque celle-ci n'est restituée par aucun amplificateur opérationnel du schéma. Les variables mathématiques y' et y sont représentées par les tensions électriques $u_{y1} = m_{y1}y'$ et $u_{y0} = m_{y0}y$, où m_{y1} et m_{y0} sont les échelles des variables y' et y. Les échelles sont assujetties à la condition

$$-100 \text{ V} \leqslant u \leqslant 100 \text{ V}$$

*) Un programme complet est un programme composé jusqu'au niveau du schéma de commutation.

qui traduit le fait qu'aucune variable machine ne doit quitter la plage ± 100 V en dehors de laquelle les opérateurs des calculateurs à tubes fournissent des résultats entachés d'erreurs. Aussi l'échelle



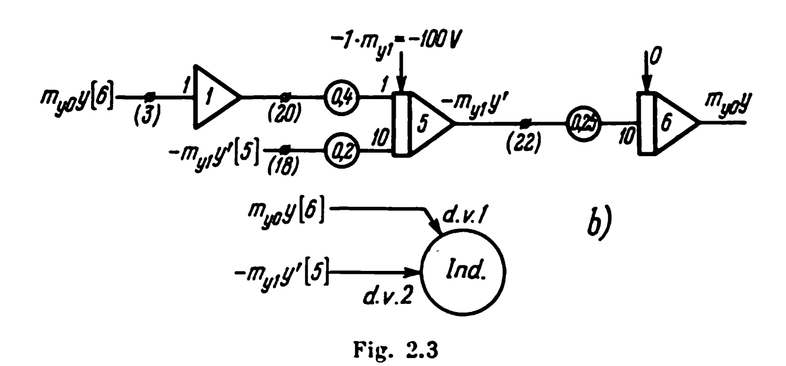


Fig. 2.3

est-elle choisie d'ordinaire d'après la formule $m_{y0} = 100$ V/$|y_{max}|$, car la variable machine u_{y0} ne peut être supérieure à 100 V. En effet,

$$u_{y0} = m_{y0}y = 100 \frac{y}{|y_{max}|} V \leqslant 100V.$$

L'adaptation des échelles implique la connaissance des valeurs maximales des variables. Calculons-les pour y et y'.

La variable $y(t)$ prend sa valeur maximale dans l'intervalle $t \in [0, \infty]$, puisque $y(0) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Cherchons donc la valeur $t = t^*$ qui annule y'. On a

$$-t \exp(-t) + \exp(-t) = 0,$$

d'où $t^* = 1$ et $y_{max} = e^{-1}$.

Pour $t = 0$ on a $y'(0) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$. Vérifions maintenant la valeur de la fonction $y'(t)$ à l'intérieur de l'intervalle $[0, \infty]$. La condition $y''(t) = 0$ donne l'équation $t \exp(-t) - 2 \exp(-t) = 0$, d'où $t^{**} = 2$ et $y'(t^{**}) = e^{-2}$. Donc, y' prend son maximum 1

pour $t = 0$. Les échelles sont adaptées dans des tableaux dits *tableaux d'échelle*.

Expliquons le contenu de la troisième colonne du tableau 2.1. Lorsqu'on adapte les échelles on arrondit toujours par excès (pourquoi ?) jusqu'au plus proche nombre de la forme $10^{\pm n}$, $2 \times 10^{\pm}$,

Tableau 2.1

Variable	Valeur maximale		Echelle	Symbole de l'échelle
	exacte	approchée		
y	$e^{-1}=0,368$	0,4	$\frac{100}{0,4}=250$	m_{y0}
y'	1	1	$\frac{100}{1}=100$	m_{y1}

$4 \times 10^{\pm n}$ où n est un entier, ceci dans le but de passer sans peine des variables mathématiques aux tensions électriques et inversement.

4) Mise au point du schéma de commutation. Le schéma de commutation est composé pour les variables machine. Il est orienté vers une machine concrète, plus précisément vers celle retenue pour résoudre le problème. Ici c'est un calculateur MH-7M dont le panneau de commutation est représenté sur la figure 3.3. Le schéma de commutation traduit le principe de connexion des opérateurs. Il porte les numéros des opérateurs et de leurs entrées. Il sert à composer un problème sur le panneau de commutation de la machine (cf. fig. 2.3, *b*). Il se distingue légèrement des schémas fonctionnels par la composition et la représentation des opérateurs. Il comporte notamment des potentiomètres supplémentaires destinés à adapter les échelles. Ainsi le potentiomètre disposé à l'entrée (22) *) de l'intégrateur [6] possède un coefficient de transfert égal à 0,25 ; le produit de ce coefficient par le coefficient de transfert fixe de l'intégrateur [6] donne un coefficient résultant égal à 2,5. Ce nombre n'est autre que le rapport des échelles $m_{y0}/m_{y1} = 250/100 = 2,5$. Il faut adapter les échelles, car la variable $-y'$ est délivrée à l'échelle m_{y1} par l'intégrateur [5] et la variable y à l'échelle m_{y0} par l'intégrateur [6]. Donc, en choisissant le coefficient de transfert résultant de l'intégrateur [6] sous forme du quotient m_{y0}/m_{y1}, nous appliquons la variable $-y'$ à l'entrée de l'intégrateur [6] avec l'échelle m_{y0} qu'elle a à la sortie de l'intégrateur [6].

2.6. Composer et câbler les schémas de commutation des fonctions suivantes de la variable indépendante t. Utiliser le circuit de

*) Les parenthèses désigneront le numéro de l'entrée, les crochets, celui de l'opérateur.

commande préprogrammée pour déterminer les zéros, les extrema et les points d'inflexion de ces fonctions.

1) $y = 1 + t + t^2 + t^3$.
2) $y = a \exp(-\alpha t)$.
3) $y = a \sin \omega t$.
4) $y = b \cos \omega t$.
5) $y = a^t$.
6) $y = t \exp(-t)$.
7) $y = t^2 \exp(-t)$.
8) $y = t^3 \exp(-t)$.
9) $y = (at + b) \exp(-\alpha t)$.
10) $y = a \sin \omega t + b \cos \omega t$.
11) $y = a \sin \omega t \cos \omega t$.
12) $y = \exp(-\alpha t) \sin \omega t$.
13) $y = \exp(-\alpha t) \sin(\omega t + \psi)$.
14) $y = \exp(-\alpha t) \cos \omega t$.
15) $y = \sin^2 \omega t$.
16) $y = \cos^2 \omega t$.
17) $y = \cos t + t \sin t$.
18) $y = a \operatorname{sh} \omega t$.
19) $y = b \operatorname{ch} \omega t$.
20) $y = a \operatorname{sh} \omega t + b \operatorname{ch} \omega t$.
21) $y = (1 + \cos \omega t) \cos \omega t$.
22) $y = (1 + \cos \omega t) \sin \omega t$.
23) $y = t^4 \exp(-t)$.
24) $y = \exp(-t/2)(1 + t)$.
25) $y = \cos t + \sin t - 2t \sin t$.
26) $y = t^2 - 2t + 1 + \exp(-t)$.
27) $y = \cos^2 \omega t + a \exp(-t)$.
28) $y = \cos^2 \omega t + 2t - 1$.
29) $y = 1 + t^2 + \exp(-t)$.
30) $y = t^3 \exp(-t) + \sin t$.
31) $y = \exp(1 - t) + \cos t$.
32) $y = t^2 \exp(1 - t) + \sin(1 - t)$.
33) $y = t^2 + \sin t$.
34) $y = t^2 + t^2 \exp(-t)$.
35) $y = 1 - \exp(-t) - t \exp(-t)$.
36) $y = \sin t - t \cos t$.
37) $y = \operatorname{sh} \omega t + \exp(-\omega t)$.
38) $y = \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t$.
39) $y = \cos^2 \omega t + \sin 2\omega t$.
40) $y = 1 - 3\sin^2 t$.

Indications et explications.

1) On mettra en jeu des opérateurs linéaires: des sommateurs et des intégrateurs.

2) Les fonctions sont simulées pour $t \in [0, \infty]$. Si la fonction ou ses dérivées ne sont pas bornées sur l'intervalle $[0, \infty]$ il faut se limiter à l'intervalle $[0, 3]$ pour l'adaptation des échelles et la simulation. Dans ce cas il est nécessaire de prévoir l'arrêt de la machine à la condition $t = 3$ à l'aide d'un circuit de commande préprogrammée.

3) Le schéma doit élaborer les variables y, y' et y'' pour la détermination des zéros, des extrema et des points d'inflexion de la fonction. Lorsque ces variables s'annulent le circuit de commande préprogrammée doit automatiquement stopper la machine, fixant ainsi

les zéros, les extrema ou les points d'inflexion de la fonction. La valeur numérique de la valeur indépendante correspondant à tel ou tel point « singulier » de la courbe peut être figée à l'aide d'un intégrateur élaborant la variable t.

4) Les schémas de commutation sont génériques. Ils sont réalisés pour des valeurs numériques de tous les paramètres égales à l'unité. La durée de résolution du problème peut être modifiée pour faciliter l'observation sur l'indicateur électronique.

2.7. Composer les schémas fonctionnels pour la simulation des équations différentielles linéaires et non homogènes et des systèmes d'équations différentielles linéaires et non homogènes suivants.

I n d i c a t i o n. Se servir de la méthode des équations différentielles déterminantes pour ramener les équations non homogènes données à des équations homogènes linéaires d'ordre plus élevé.

1) $y'' - 2y' - 3y = \exp(-t)$.

2) $y'' - y = 2\exp(-t) - t^2$.

3) $y'' - 3y' + 2y = \sin t$.

4) $y'' - 5y' + 4y = 4t^2 \exp(-2t)$.

5) $y'' + 3y' - 4y = \exp(-4t) + t\exp(-t)$.

6) $y'' + 2y' - 3y = t^2 \exp(-t)$.

7) $y'' - 4y' + 8y = \exp(-2t) + \sin 2t$.

8) $y'' - 9y = \exp(-3t)\cos t$.

9) $y'' + y = \exp(-t)\sin t$.

10) $y'' - 5y' = 3t^2 + \sin t$.

11) $y'' + y = 4t\exp(-t)$.

12) $y'' + y' - 2t = 3t\exp(-t)$.

13) $y'' + y = 4\sin t$.

14) $y'' - 3y' + 2y = t\cos t$.

15) $y'' + 4y = \cos t + \cos 3t$.

16) $y'' + 2y' + y = 6t\exp(-t)$.

17) $y'' + 4y' + 4y = t\exp(-2t)$.

18) $y'' + 2y' + 2y = \exp(-t) + t\cos t$.

19) $y'' + 6y' + 10y = 3t\exp(-3t) - 2\exp(-3t)\cos t$.

20) $y'' + 8y' + 20y = 5t\exp(-4t)\sin 2t$.

21) $y'' + y = 4\exp(-t)\,\mathrm{sh}\, t$.

22) $y'' + 4y = \mathrm{sh}\, t \sin 2t$.

23) $y'' + 7y' + 10y = t \exp(-2t) \cos 5t$.

24) $y'' + 2y' + 5y = 2t \exp(-t) + \exp(-t) \sin 2t$.

25) $y'' + 2y' + y = 2t \exp(-2t) + \exp(-t) \sin t$.

26) $y'' + 8y' + 17y = \exp(-4t) [t^2 - 3t \sin t]$.

27) $y''' + 2y'' + 4y' - 8y = \exp(-2t) \sin 2t + 2t^2$.

28) $y''' + 2y' = \sin t + t \cos t$.

29) $y'' + 6y' + 8y = 2t \exp(-2t) + \exp(-4t) \sin t$.

30) $y'' + 2y' + y = t [\exp(-t) - \cos t]$.

31) $y''' + y'' - y' + y = 3 \exp(-t) + 5t \sin t$.

32) $y'' + 6y' + 3y = t^2 \exp(-3t) - 3 \cos^2 2t$.

33) $y'' - 9y = \exp(-3t) [t^2 + \sin 3t]$.

34) $y^{\text{IV}} + y''' = 7t - 3 \cos^2 t$.

35) $y''' + 4y'' + 3y' = t^2 + t \exp(-2t)$.

36) $y'' - 4y' + 5y = \exp(-2t) \sin^2 t$.

37) $y'' + 3y' + 2y = \exp(-t) \cos^2 t$.

38) $y'' + 2y' + 2y = [t + \exp(-t)] \sin t$.

39) $y^{\text{IV}} + 5y'' + 4y = \sin t \cos 2t$.

40) $y'' + 3y' + 2y = 2t$.

41) $y'' + 4y' + 3y = \text{ch}\, t$.

42) $y'' + 2y' + y = \text{ch}\, t \sin t$.

43) $x' = 3x - 4y + \exp(-2t)$,
$y' = x - 2y - 3 \exp(-2t)$.

44) $x' = 2y - x + 1$,
$y' = 3y - 2x$.

45) $x' = y + 2 \exp(-3t)$,
$y' = x + t^2$.

46) $x' = 3x + 2y + 2 \exp(-t)$,
$y' = x + 2y$.

47) $x' = 4x + y - \exp(-2t)$,
$y' = y - 2x$.

48) $x' = 5x - 3y + \exp(-3t)$,
$y' = x + y + 5 \exp(-t)$.

49) $x' = x + 2y + \exp(-t)$,
$y' = x - 5 \sin t$.

50) $x' = 2x - y + t \exp(-t)$,
$y' = -x + y + 3t$.

51) $x' = 2x + 4y - t^2 \exp(-t)$,
$y' = 3x + 6y$.

52) $x' = 2x + 3y + 5t$,
$y' = 3x + 2y + 8 \exp(-t)$.

53) $x' = x + y + 1 - \exp(-t)$,
$y' = 3x - y + 1 - \sin t$.

54) $x' = -y + \sin t$,
$y' = x - \cos t$.

55) $x' = 2x - 4y$,
$y' = x - 3y + 3 \exp(-t)$.

56) $x' = 2x - 3y + t \sin t$,
$y' = x - 2y + \sin^2 t$.

57) $x' = 2x - y + t \exp(-2t)$,
$y' = x + 2 \exp(-t)$.

58) $x' = 2x + y + 2 \exp(-t)$,
$y' = x - 2y - \cos^2 t$.

59) $x' = 2x - y + t \exp(-t)$,
$y' = 2y - x - 5 \exp(-t) \sin t$.

60) $x' = 4x - 3y + \sin^2 t$,
$y' = 2x - y - 2 \sin 2t$.

61) $x' = x - y + 4t$,
$y' = 5x - y + t \exp(-2t)$.

62) $x' = -x + y + z + \exp(-t)$,
$y' = x - y + z + \exp(-3t)$,
$z' = x + y + z + \sin t$.

63) $x' = 3y - x - \exp(-\alpha t)$,
$y' = y + x + \exp(-\beta t)$.

64) $x' + y' - y = \exp(-t)$,
$2x' + y' + 2y = \cos^2 t$.

65) $x''' + 2x'' + x' = 1 - \sin^2 t$.

66) $x'' + 3x' + 2x = t \exp(-t)$.

67) $x'' + x = t^2 \exp(-t)$.

68) $x'' + x = \sin^2 t$.

69) $x'' + x = t \cos 2t$.

EXEMPLE 2.4. Composer le schéma de commutation de la fonction $y = \exp(-t^2)$ sur l'intervalle [0, 4].

1) Déduction du système d'équations différentielles déterminantes. La fonction donnée

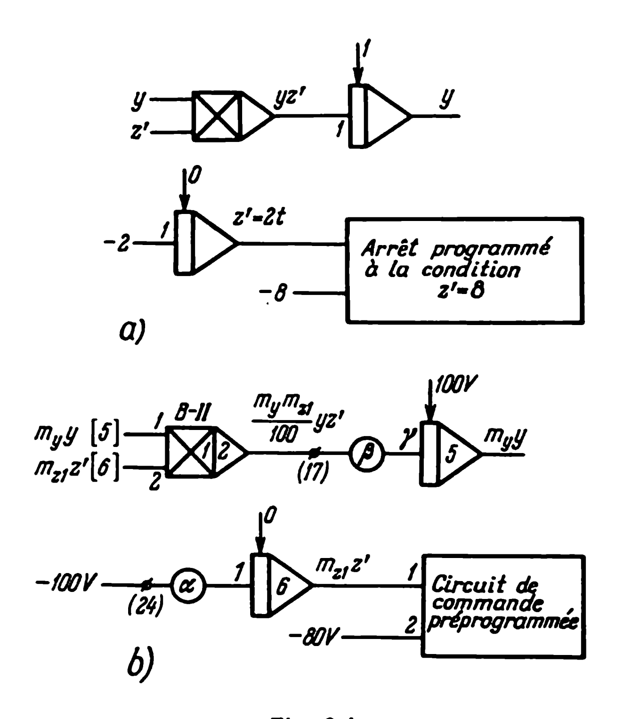


Fig. 2.4

est composée (est la superposition de deux fonctions). Soit $z(t) = t^2$.

Une dérivation de la fonction $y(t)$ donne $y' = -\exp(-z)\, z'$. D'autre part $z' = 2t$, $z'' = 2$.

D'où l'on déduit le système d'équations déterminantes cherché

$$\begin{aligned} y' &= -yz', \qquad y(0) = 1, \\ z'' &= 2, \quad z'(0) = z(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2) S c h é m a f o n c t i o n n e l. Le schéma est représenté sur la figure 2.4, *a*. Il contient un circuit de commande préprogrammée pour stopper la machine à la condition $t = 4$. Il en résulte que pour reproduire la variable $y(t)$ il n'est pas nécessaire de reproduire $z(t) = t^2$, mais seulement $z'(t)$. Ce cas est très fréquent lorsqu'on a affaire à une superposition de fonctions.

3) C h o i x d e s é c h e l l e s. Les variables $-z'$ et y sont à adapter. Leurs valeurs maximales se déterminent sans peine. L'adaptation est conduite dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2

Variable	Valeur maximale		Echelle	Symbole de l'échelle
	exacte	arrondie		
y	1	1	100	m_y
z'	8	10	10	m_{z1}

4) S c h é m a d e c o m m u t a t i o n. Il est représenté sur la figure 2.4, *b*. Les coefficients de transfert α, β et γ sont encore inconnus. Leurs valeurs numériques se déterminent à partir des conditions d'adaptation des échelles des variables. Le schéma de commutation comprend un multiplieur B-II monté sur la base des amplificateurs opérationnels [1] et [2]. Le coefficient α est donné par la formule suivante

$$\alpha = 2m_{z1}/100 = 20/100 = 0,2.$$

Le produit $\beta\gamma$ doit être tel qu'à la sortie de l'intégrateur [5] la variable $y(t)$ possède l'échelle m_y compte tenu de l'échelle 0,01 du multiplieur:

$$\beta\gamma = \frac{m_y \cdot 100}{m_y m_{z1}} = \frac{100}{10} = 10.$$

Prenons les valeurs $\gamma = 10$ et $\beta = 1$ qui correspondent à l'entrée (17) de l'intégrateur [5] (cf. fig. 3.3. qui représente le panneau de commutation de la machine MH-7M).

2.8. Composer et câbler les schémas de commutation des fonctions suivantes:

1) $y = \sin \exp(-t)$.
2) $y = \sin \cos t$.
3) $y = \sin \sin t$.
4) $y = \sin \operatorname{sh} t$
5) $y = \sin \operatorname{ch} t$.
6) $y = \cos \exp(-t)$.
7) $y = \cos \cos t$.
8) $y = \cos \sin t$.
9) $y = \cos \operatorname{sh} t$.
10) $y = \cos \operatorname{ch} t$.

11) $y = \exp(-\exp(-t))$.
12) $y = \exp(-\operatorname{sh} t)$.
13) $y = \exp(-\operatorname{ch} t)$.
14) $y = \operatorname{sh} \operatorname{sh} t$.
15) $y = \operatorname{sh} \operatorname{ch} t$.
16) $y = \sin \sin^2 t$.
17) $y = \sin \cos^2 t$.
18) $y = \sin \exp(-t^2)$.
19) $y = \sin(t \exp(-t))$.
20) $y = \sin \operatorname{sh}^2 t$.
21) $y = \cos \sin^2 t$.
22) $y = \cos \cos^2 t$.
23) $y = \cos \exp(-t^2)$.
24) $y = \cos(t \exp(-t))$.
25) $y = \cos \operatorname{ch}^2 t$.
26) $y = \sin \operatorname{ch}^2 t$.
27) $y = \cos \operatorname{sh}^2 t$.
28) $y = \sin t^2$.
29) $y = \cos t^2$.
30) $y = \operatorname{sh} t^2$.

Indications et explications.

1) Lorsqu'on cherche les équations différentielles déterminantes d'une fonction du type $\sin f(t)$ ou $\cos f(t)$ on a intérêt à considérer en même temps l'autre fonction. Si, par exemple, l'on a à simuler la fonction $\sin f(t)$ on peut envisager parallèlement la simulation de la fonction $\cos f(t)$. La simulation simultanée de fonctions simplifie l'adaptation des échelles et facilite la recherche de l'équation différentielle déterminante. En effet, si $y_1 = \sin f(t)$ et $y_2 = \cos f(t)$, le système d'équations différentielles déterminantes s'écrit

$$y_1' = y_2 f'(t), \quad y_2' = -y_1 f'(t).$$

Ceci vaut également pour les fonctions $\operatorname{sh} f(t)$ et $\operatorname{ch} f(t)$.

2) Si l'une des fonctions ou ses dérivées ne sont pas bornées sur l'intervalle $[0, \infty]$, pour la simuler il faut se limiter à l'intervalle $[0, 3]$, ce qui implique l'interruption de la résolution à l'aide du circuit de commande préprogrammée.

3) Certaines équations différentielles déterminantes sont susceptibles de posséder des solutions instables, c'est pourquoi on a intérêt à les résoudre sur machine et à évaluer l'influence de petites variations des conditions initiales sur le comportement de la solution.

2.9. Composer les schémas fonctionnels des équations différentielles suivantes.

1) $y'' = -\omega^2 \sin y - \alpha y'$.
2) $y'' = -\alpha^2 \sin^2 y - by'$.
3) $y'' = -\omega^2 \sin y + \sin t$.
4) $y'' = -\exp(-t) \sin y$.
5) $[(1 + \sin^2 t)\, y'')]'' = \exp(-t)$.

6) $[1 + \exp(-t)]\, y'' + 2y' + y = 0$.

7) $[(1 + \exp(-t))\, y']' = \alpha \sin \omega t$.

8) $[y''/(1 + t)]'' = \exp(-t)$.

9) $[y''/(1 + t))]' = 1/(1 + t)$.

10) $y'' = -\alpha y^3 + \sin \omega t$.

11) $y' = 1 + y^2 + \exp(-\alpha t) \sin \omega t$.

12) $y' = 1 - y^2 + \exp(-\alpha t) \cos \omega t$.

§ 3. Simulation de courbes planes données sous forme paramétrique

2.10. Etant données les courbes suivantes sous forme paramétrique, on demande les schémas de commutation

1) délivrant le graphe des courbes $F_1(x, y) = 0$, $F_2(\dot{x}, \dot{y}) = 0$ sur l'écran de l'indicateur électronique;

2) déterminant les points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées;

3) déterminant les points en lesquels la courbe admet des tangentes parallèles aux axes de coordonnées. Construire les courbes si la machine comporte un traceur de courbes planes.

1) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ (ellipse).

2) $x(t) = a \operatorname{ch} t$, $y(t) = b \operatorname{sh} t$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant 10$ (hyperbole).

3) $x(t) = at$, $y(t) = bt^2$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant 10$ (parabole).

4) $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$ (développante).

5) $x(t) = 2 \cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$ (cardioïde).

6) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$ (cycloïde).

7) $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ (astroïde).

8) $x(t) = \cos^2 t + 3 \cos t$, $y(t) = \cos t \sin t + 3 \sin t$ (limaçon de Pascal).

9) $x(t) = \sin 3t + \sin t,$

$y(t) = \cos 3t - \cos t;$

10) $x(t) = \sin 4t + \sin 2t,$

$y(t) = \cos 4t - \cos 2t;$

11) $x(t) = \sin 5t + \sin 3t,$

$y(t) = \cos 5t - \cos 3t;$

12) $x(t) = \sin 6t + \sin 4t,$

$y(t) = \cos 6t - \cos 4t;$

13) $x(t) = \sin 7t + \sin 5t,$

$y(t) = \cos 7t - \cos 5t$

(roses).

14) $x(t) = (\cos t + \sin t) \exp(-t),$
$y(t) = (\sin t - \cos t) \exp(-t)$ (spirale logarithmique).

15) $x(t) = t \cos t,$
$y(t) = t \sin t$ (spirale d'Archimède).

16) $x(t) = (1 + t)^{-1} \cos(t + 1).$
$y(t) = (1 + t)^{-1} \sin(t + 1)$ (spirale hyperbolique).

17) $x(t) = t - 1{,}25 \sin t,$
$y(t) = 1 - 1{,}25 \cos t,$ $0 \leqslant t \leqslant 6\pi;$

18) $x(t) = t - 1{,}5 \sin t,$
$y(t) = 1 - 1{,}5 \cos t,$ $0 \leqslant t \leqslant 6\pi;$

19) $x(t) = t - 2 \sin t,$
$y(t) = 1 - 2 \cos t,$ $0 \leqslant t \leqslant 8\pi;$

20) $x(t) = t - 0{,}75 \sin t,$
$y(t) = 1 - 0{,}75 \cos t,$ $0 \leqslant t \leqslant 7\pi$

trochoïdes.

21) $x(t) = 3 \cos t - \cos 3t,$

$y\ ) = 3 \sin t - \sin 3t;$

22) $x(t) = 4 \cos t - \cos 4t,$

$y(t) = 4 \sin t - \sin 4t;$

23) $x(t) = 5 \cos t - \cos 5t,$

$y(t) = 5 \sin t - \sin 5t;$

24) $x(t) = 6 \cos t - \cos 6t,$

$y(t) = 6 \sin t - \sin 6t$

(épicycloïdes).

25) $x(t) = 6 \cos t - 1{,}25 \cos 6t,$

$y(t) = 6 \sin t - 1{,}25 \sin 6t;$

26) $x(t) = 6 \cos t - 1{,}5 \cos 6t,$

$y(t) = 6 \sin t - 1{,}5 \sin 6t;$

(épitrochoïdes).

27) $x(t) = 6\cos t - 2\cos 6t$,
$y(t) = 6\sin t - 2\sin 6t$;

28) $x(t) = 8\cos t - 2\cos 8t$,
$y(t) = 8\sin t - 2\sin 8t$

29) $x(t) = 2\cos t + \cos 2t$,
$y(t) = 2\sin t - \sin 2t$;

30) $x(t) = 3\cos t + \cos 3t$,
$y(t) = 3\sin t - \sin 3t$;

31) $x(t) = 4\cos t + \cos 4t$,
$y(t) = 4\sin t - \sin 4t$;

32) $x(t) = 5\cos t + \cos 5t$,
$y(t) = 5\sin t - \sin 5t$;

33) $x(t) = 6\cos t + \cos 6t$,
$y(t) = 6\sin t - \sin 6t$

(hypocycloïdes).

34) $x(t) = 2\cos t + 1{,}25\cos 2t$,
$y(t) = 2\sin t - 1{,}25\sin 2t$;

35) $x(t) = 2\cos t + 1{,}5\cos 2t$,
$y(t) = 2\sin t - 1{,}5\sin 2t$;

36) $x(t) = 3\cos t + 1{,}25\cos 3t$,
$y(t) = 3\sin t - 1{,}25\sin 3t$;

37) $x(t) = 3\cos t + 1{,}5\cos 3t$,
$y(t) = 3\sin t - 1{,}5\sin 3t$;

38) $x(t) = 4\cos t + 1{,}5\cos 4t$,
$y(t) = 4\sin t - 1{,}5\sin 4t$;

39) $x(t) = 5\cos t + 1{,}5\cos 5t$,
$y(t) = 5\sin t - 1{,}5\sin 5t$

(hypotrochoïdes).

I n d i c a t i o n. On recommande de programmer la machine pour le cas générique comme dans l'exemple 2.5 suivant. Une fois le schéma générique obtenu, sa réalisation pour des valeurs numériques données ne présente aucune difficulté.

EXEMPLE 2.5. Simuler l'hypotrochoïde

$$x(t) = \omega\cos t + \lambda\cos\omega t, \qquad y(t) = \omega\sin t - \lambda\sin\omega t, \quad \lambda > 1. \tag{2.9}$$

Au premier examen il semble plus commode de simuler $x(t)$ et $y(t)$ par sommation des fonctions $\cos t$, $\sin t$, $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$. Mais dans ce cas la machine ne délivrera pas les variables $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ indispensables au tracé de l'hodographe *) $F_2(\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Nous allons procéder autrement. Nous allons chercher les équations différentielles déterminantes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

1) Recherche des équations différentielles déterminantes. Une dérivation de (2.9) donne

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \sin t - \lambda\omega \sin \omega t, \\ \dot{y} &= \omega \cos t - \lambda\omega \cos \omega t. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En portant dans (2.10) les expressions de $\omega \cos t$ et $\omega \sin t$, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \lambda(1 + \omega) \sin \omega t, \\ \dot{y} &= x - \lambda(1 + \omega) \cos \omega t. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Une dérivation de (2.11) donne

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{y} - \lambda\omega(1 + \omega) \cos \omega t, \\ \ddot{y} &= \dot{x} + \lambda\omega(1 + \omega) \sin \omega t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

En portant dans (2.12) les expressions $\lambda\omega(1 + \omega) \cos \omega t$ et $\lambda\omega(1 + \omega) \sin \omega t$ tirées de (2.11), on obtient en définitive le système d'équations différentielles déterminantes

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\omega - 1)\dot{y} - \omega x, \\ \ddot{y} &= -(\omega - 1)\dot{x} - \omega y \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) &= \omega + \lambda, & \dot{x}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= \omega(1 - \lambda). \end{aligned}$$

2) Schéma fonctionnel. Il est composé pour (2.13) d'après la méthode générale (fig. 2.5). Les variables $y(t)$ et $x(t)$ sont appliquées respectivement sur les plaques de déviation verticale et horizontale de l'indicateur électronique sur l'écran duquel est représentée la courbe $F_1(x, y) = 0$ qui n'est autre que l'hypotrochoïde allongée donnée. Si l'on applique la variable $-\dot{y}(t)$ sur les

*) En *Mécanique* on définit l'hodographe de la vitesse comme suit. A partir d'un point arbitraire du plan (appelé pôle) on trace des vecteurs équipollents à la vitesse du point en mouvement. Les extrémités de ces vecteurs décrivent une courbe appelée *hodographe de la vitesse*. Ici, le pôle est l'origine des coordonnées.

plaques de déviation verticale et $-\dot{x}(t)$ sur les plaques de déviation horizontale, on obtiendra l'hodographe de $F_2(\dot{x}, \dot{y}) = 0$. Pour stopper automatiquement la machine aux points d'intersection de l'hypotrochoïde avec l'axe des x, on applique la variable $x(t)$ à l'entrée du circuit de commande préprogrammée. On peut stopper automatiquement la machine en tous les points où $x(t) = 0$, en

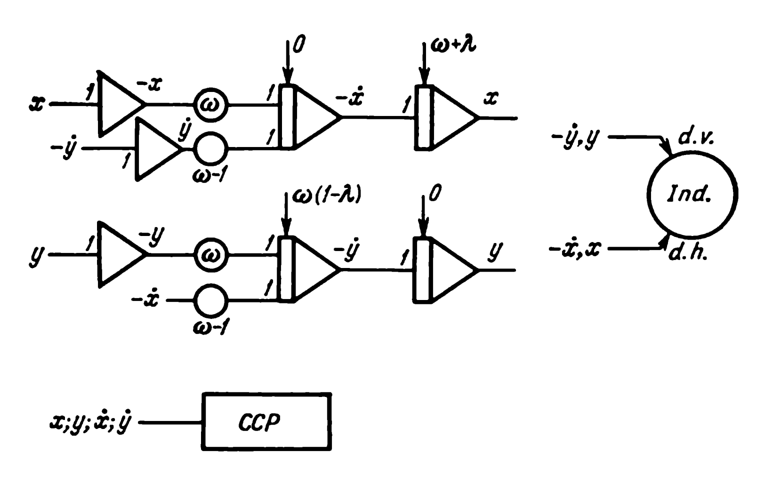


Fig. 2.5

modifiant la condition d'arrêt automatique (arrêt lorsque $x(t)$ passe par zéro en décroissant ou en croissant). De façon analogue, pour déterminer les points d'intersection de l'hypotrochoïde avec l'axe des y, on applique la variable $y(t)$ à l'entrée du circuit de commande préprogrammée; pour déterminer les points en lesquels l'hypotrochoïde admet une tangente horizontale ou verticale, on applique respectivement les variables $-\dot{y}(t)$ et $-\dot{x}(t)$ à l'entrée du circuit de commande préprogrammée.

3) Choix des échelles des variables. On adapte l'échelle des variables qui sont « explicitement » représentées

Tableau 2.3

Variable	Valeur maximale de la variable	Echelle	Symbole de l'échelle
x, y	$\omega+\lambda$	$\frac{100}{\omega+\lambda}$	m_0
$\dot{x}$, $\dot{y}$	$\omega(1+\lambda)$	$\frac{100}{\omega(1+\lambda)}$	m_1

sur le schéma fonctionnel. Dans le schéma de la figure 2.5, on adaptera l'échelle de $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$. Cette procédure est conduite dans le tableau 2.3, où les échelles des variables $x(t)$, $y(t)$ d'une part et $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ d'autre part sont égales. Les valeurs maximales des variables $x(t)$ et $y(t)$ sont tirées de (2.9), celles de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ de (2.10). Le choix des échelles correspond au cas générique, i.e. il est réalisé pour une hypotrochoïde quelconque.

4) Schéma de commutation. Il est représenté sur la figure 2.6. Contrairement au schéma fonctionnel, il comporte des

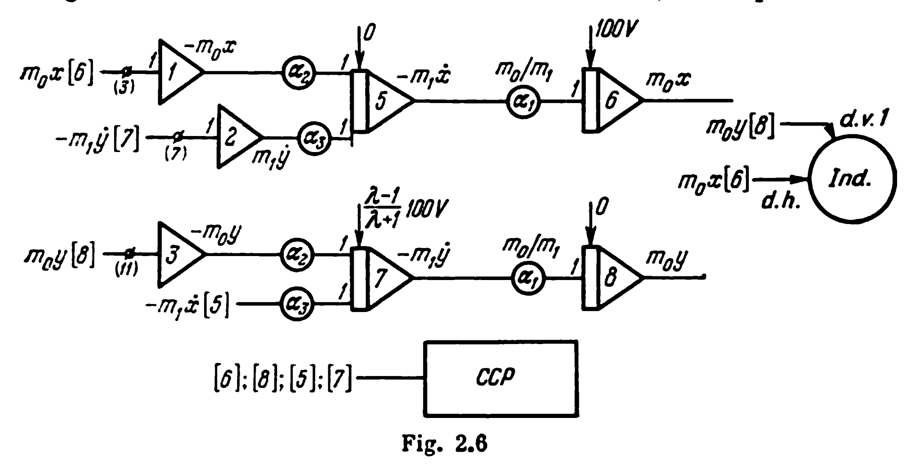


Fig. 2.6

potentiomètres supplémentaires pour l'adaptation des échelles. Les coefficients de transfert de ces potentiomètres dépendent des échelles des variables et des coefficients de transfert du schéma fonctionnel :

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_1} = \frac{\omega(1+\lambda)}{\omega+\lambda}, \quad \alpha_2 = \omega\frac{m_1}{m_0} = \frac{\omega+\lambda}{1+\lambda},$$

$$\alpha_3 = (\omega-1)\frac{m_1}{m_1} = \omega - 1.$$

Le schéma de commutation est générique, i.e. il simule une hypotrochoïde quelconque. Pour concrétiser le problème il suffit de prendre des coefficients de transfert α_1, α_2 et α_3 appropriés.

Trouvons les valeurs numériques des coefficients de transfert α_1, α_2, α_3 correspondant à $\omega = 8$ et $\lambda = 2$, le temps de simulation étant ralenti de 10 fois pour permettre le tracé de la courbe avec un traceur. On obtient

$$\alpha_1 = \frac{8(1+2)}{10\cdot 10} = 0{,}24, \quad \alpha_2 = \frac{10}{3\cdot 10} = 0{,}333, \quad \alpha_3 = \frac{8-1}{10} = 0{,}7.$$

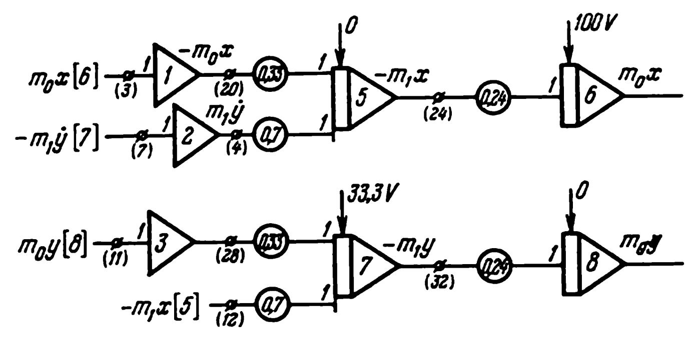


Fig. 2.7

Le schéma de commutation correspondant à ces coefficients est représenté sur la figure 2.7.

§ 4. Simulation de courbes planes données implicitement

Pour simuler une courbe plane d'équation $F(x, y) = 0$, il faut passer de la forme implicite à la forme paramétrique $x(t)$, $y(t)$ où t est un paramètre. Il existe un procédé qui permet de trouver immédiatement les équations différentielles déterminantes de $x(t)$ et $y(t)$ sans en calculer les expressions analytiques. Etudions ce procédé.

Soit une courbe plane $F(x, y) = 0$. Si le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ appartient à cette courbe, la dérivée totale de la fonction $F(x, y)$ par rapport à t s'annule en ce point. Donc, quelle que soit la représentation paramétrique de la courbe, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0.$$

Cette égalité a visiblement lieu si la représentation paramétrique est telle que

$$\frac{dx}{dt}=-\omega\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{dy}{dt}=\omega\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{2.14}$$

où ω est un nombre arbitraire différent de zéro.

Les équations différentielles (2.14) sont équations différentielles déterminantes pour les fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Il faut se donner les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$. L'une des conditions initiales est choisie arbitrairement, par exemple $x(0) = x_0$. L'autre condition est la solution de l'équation $F(x_0, y_0) = 0$ par rapport à y_0. Les conditions initiales x_0 et y_0 signifient que la courbe est simulée à partir du point (x_0, y_0). Le point initial (x_0, y_0) partage la courbe en deux branches, l'une simulée pour $\omega > 0$, l'autre pour $\omega < 0$.

Ainsi, en principe, le problème posé se ramène à la résolution sur la machine du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \frac{\partial F}{\partial y}, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= \omega \frac{\partial F}{\partial x}, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $F(x_0, y_0) = 0$.

Mais la simulation de la courbe plane par câblage de l'équation (2.15) est susceptible de conduire à un résultat erroné en raison de la grande influence des petites erreurs des conditions initiales sur la solution. Cette influence est particulièrement sensible lorsque le système (2.15) possède une solution instable. Aussi est-on tout naturellement poussé à « corriger » le système (2.15) de telle sorte que la courbe donnée soit simulée assez bien quelles que soient les conditions initiales. Ceci est possible si l'on remplace le système (2.15) par le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda F \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \omega \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda F \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\lambda \gg 1$, et les termes $F \frac{\partial F}{\partial x}$ et $F \frac{\partial F}{\partial y}$ décrivent le mouvement du point représentatif dans la direction du minimum de la fonctionnelle $\frac{\lambda}{2} F^2(x, y)$, un minimum nul réalisé sur la courbe $F(x, y) = 0$ *). Donc, tant que le point se trouve sur la courbe $F(x, y) = 0$ les termes $\lambda F \frac{\partial F}{\partial x}$ et $\lambda F \frac{\partial F}{\partial y}$ sont nuls et (2.16) s'identifie à (2.15).

EXEMPLE. 2.6. Simuler la courbe plane

$$F(x, y) = a^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

En vertu de (2.16) on a le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y + \lambda x F, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= -\omega x + \lambda y F, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sautons les étapes intermédiaires de la programmation et indiquons directement le schéma de commutation simulant le mouvement du point sur un cercle. Le schéma de commutation de la figure 2.8 correspond au cas $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, $0 < a < 1$; les échelles sont adaptées : $a = 0{,}5$, $\omega = 0{,}5$. Les quantités λ, ω et a peuvent être modifiées à l'aide des potentiomètres portant des in-

*) Le procédé exposé se base sur la méthode des fonctions de pénalisation, cf. *Eléments de simulation sur calculateurs analogiques*, chapitre 10, § 4.

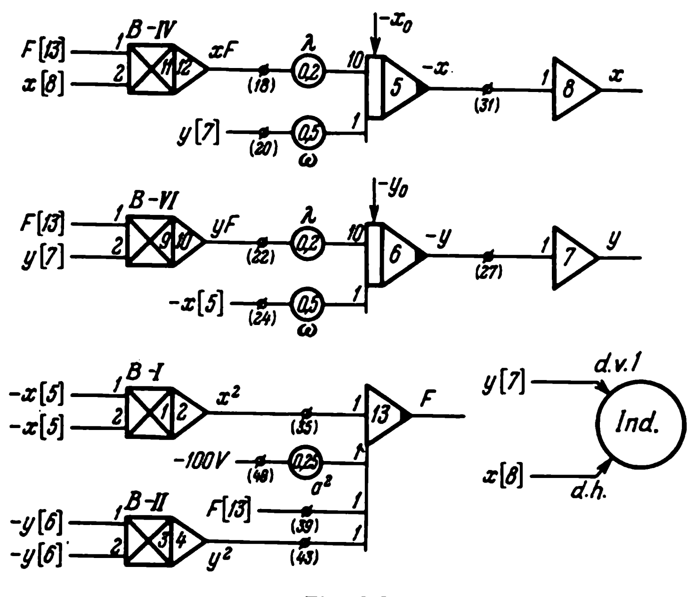

B-IV
F[13]
x[8]
xF
λ
0,2
(18)
-x₀
5
-x
(31)
8
x
y[7]
0,5
(20)
ω
B-VI
F[13]
y[7]
yF
0,2
(22)
-y₀
6
-y
(27)
7
y
-x[5]
0,5
(24)
B-I
-x[5]
-x[5]
x²
(35)
13
F
-100V
0,25
(48)
a²
B-II
F[13]
(39)
-y[6]
-y[6]
y²
(43)
y[7]
d.v.1
Ind.
x[8]
d.h.

Fig. 2.8

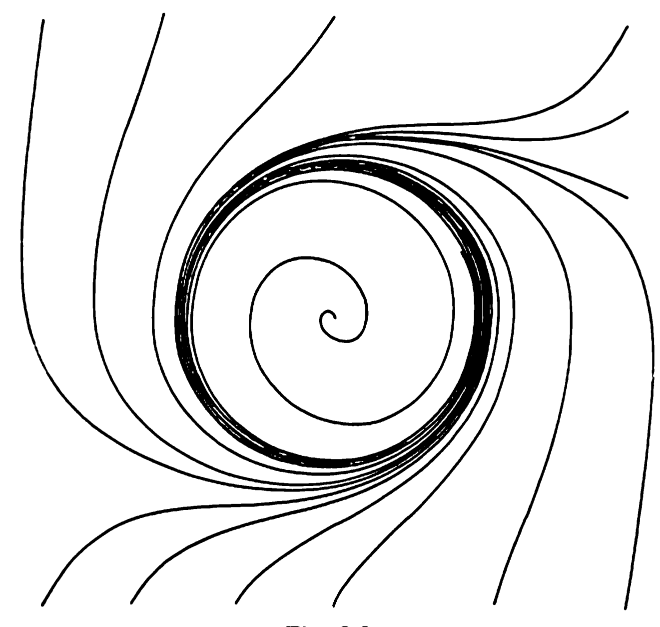


Fig. 2.9

scriptions appropriées. Les opérateurs [5], [6] et [13] possèdent des sorties plus puissantes. Ce fait est signalé sur le schéma par un noircissement du sommet désignant la sortie de l'opérateur. Toutes les échelles ont été omises pour alléger le déchiffrage de la figure 2.8.

Sur la figure 2.9 sont représentés les résultats de la simulation du système (2.17) à l'aide du schéma de la figure 2.8 pour diverses valeurs des conditions initiales x_0 et y_0 et une valeur relativement petite de λ. On constate que la trajectoire $x(t)$, $y(t)$ dégénère en un cercle lorsque $t \to \infty$. Ceci étant, si le point initial (x_0, y_0) de la trajectoire se trouve à l'intérieur du cercle, la trajectoire tendra asymptotiquement vers le cerle en l'enroulant de l'intérieur. Si le point initial se trouve à l'extérieur du cercle, la trajectoire l'enroulera de l'extérieur. Plus λ est grand, plus la trajectoire dégénère rapidement en cercle. On peut modifier le rayon du cercle à l'aide du potentiomètre en agissant sur l'entrée (40) du sommateur [13]. A noter que les trajectoires de cette nature s'appellent *cycles limites*.

La notion de cycle limite a été introduite par H. Poincaré. Les cycles limites sont étudiés dans la théorie qualitative, ou géométrique, des équations différentielles. Les cycles limites et les applications techniques qui y sont rattachées sont très importantes en théorie de la commande automatique, en radiotechnique et dans nombre d'autres disciplines. Dans notre exemple, nous avons délibérément choisi une trajectoire qui soit cercle limite, i.e. toute trajectoire issue d'un point quelconque du plan xOy dégénérera en ce cerle. Théoriquement, le point $x_0 = y_0 = 0$ est un point d'équilibre pour le système (2.17). Mais ce point est instable, donc en raison des erreurs inévitables des opérateurs, la machine ne peut délivrer la solution $x(t) = y(t) = 0$ vérifiant les conditions initiales $x_0 = y_0 = 0$.

2.11. Simuler les courbes données sous forme implicite

1) $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2$.

2) $\frac{(x-a_1)^2}{a^2} + \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1$.

3) $\frac{(x-a_1)^2}{a^2} - \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1$.

4) $(x - a_1)^2 = k(y - b_1)$.

5) $x^3 + y^3 = 3axy$.

6) $x^4 + y^4 - 2axy = 0$.

7) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b(x^2+y^2)$.

8) $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$.

9) $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2)=0$.

10) $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$.

I n d i c a t i o n s.

1) Choisir les paramètres a, a_1, b, b_1, R, etc. tels que la courbe soit simulée dans le carré $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

2) Composer le schéma de commutation à l'aide de l'équation (2.16). En cas de besoin utiliser deux machines ou plus du type MH-7M.

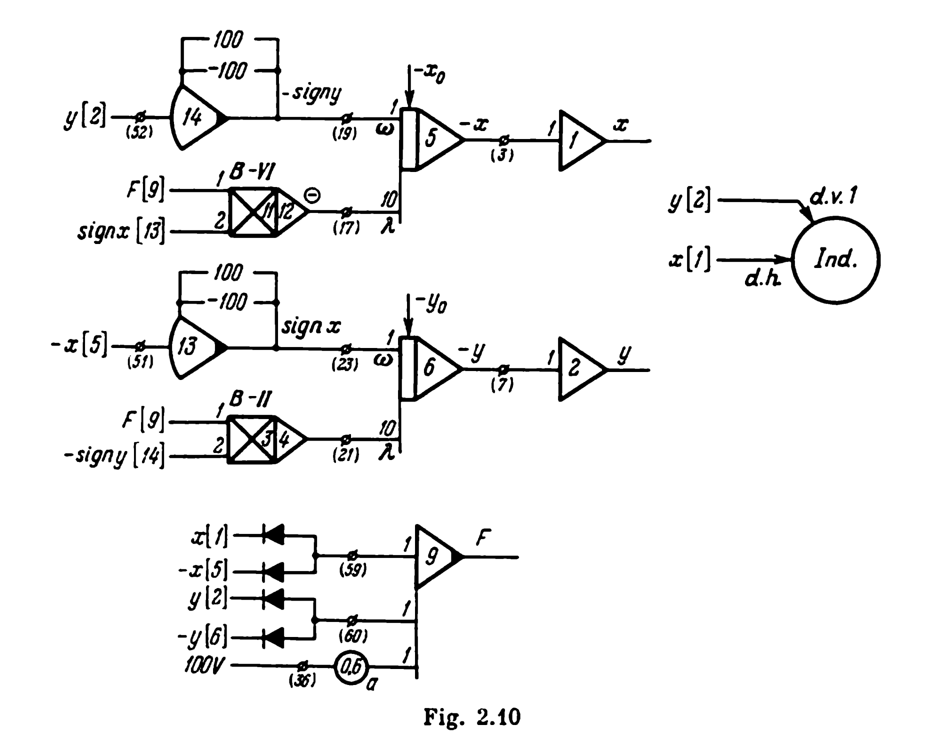


Fig. 2.10

3) Simuler les courbes avec les équations (2.15) et (2.16). Relever et expliquer les causes des divergences; tracer les courbes avec un traceur.

4) Déterminer les points d'équilibre instable de chaque trajectoire d'équation (2.16).

2.12. Réaliser les polygones réguliers suivants:

1) le carré $|x| + |y| = 1$;

2) le carré $|x - y| + |x + y| = 2$;

3) l'héxagone $|2y - 1| + \left|2y + 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}x\right| = 4$;

4) l'octogone $|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|x - y| + |x + y|) = \sqrt{2}+1$.

EXEMPLE 2.7. Simuler la courbe plane

$$F(x, y) = |x| + |y| - a = 0.$$

En vertu de (2.16) on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \operatorname{sign} y - \lambda F \operatorname{sign} x, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= \omega \operatorname{sign} x - \lambda F \operatorname{sign} y, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

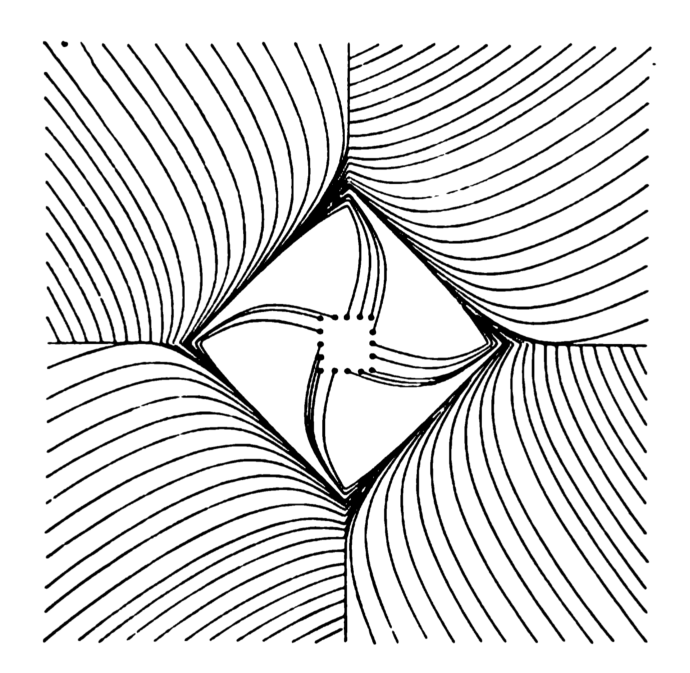


Fig. 2.11

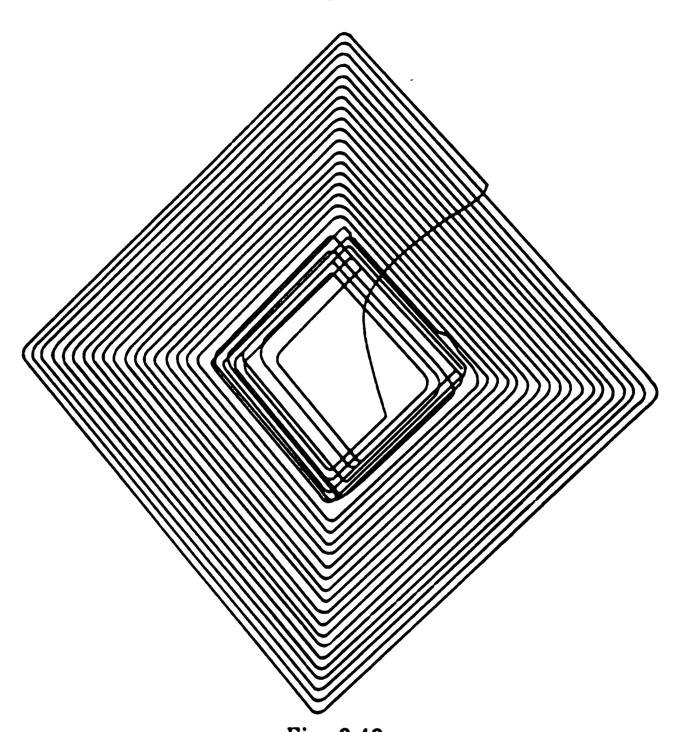


Fig. 2.12

Comme dans l'exemple 2.6, omettons les étapes intermédiaires de la programmation et donnons immédiatement le schéma de commutation (fig. 2.10). Les opérateurs [14] et [13] sont des relais parfaits (cf. « Eléments de simulation sur calculateurs analogiques », chap. 2, § 10). Les opérateurs [14] et [13] délivrent la fonction sign dont la valeur correspond à la tension électrique ± 100 V à l'échelle adoptée. Les sorties des opérateurs [9], [13] et [14] sont plus puissantes.

La figure 2.11 représente la solution machine du système (2.18) d'après le schéma de la figure 2.10. On remarque l'existence d'un cycle limite. La figure 2.12 représente le graphe, en gros plan, de la solution du système (2.18) privé des termes « pénalisants »:

$$\dot{x} = -\omega \operatorname{sign} y, \quad \dot{y} = \omega \operatorname{sign} x$$

au voisinage de $x_0 = y_0 = 0$. La trajectoire est une spirale déroulante formée de segments de ligne polygonale.

§ 5. Représentation graphique de courbes gauches

Exemple 2.8. Composer le schéma de commutation reproduisant la courbe gauche

$$z_1 = \exp(-\beta t) \cos \omega t, \quad z_2 = \alpha t, \quad z_3 = \exp(-\beta t) \sin \omega t. \tag{2.19}$$

La programmation s'amorce par la recherche des équations différentielles déterminantes qui se trouvent sans peine pour les expressions considérées:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\beta z_1 - \omega z_3, & z_1(0) &= 1, \\ \dot{z}_2 &= \alpha, & z_2(0) &= 0, \\ z_3' &= -\beta z_3 + \omega z_1, & z_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Le schéma de commutation est celui de la figure 2.13. Les variables $Y_1 = z_1 - 0{,}5z_3$, $Y_2 = z_2 - 0{,}5z_3$ qui assurent la représentation de la courbe (cf. Annexe) sont élaborées par les sommateurs [3] et [4]. La figure 2.14 représente la courbe et sa projection délivrées par le schéma de la figure 2.13. Pour obtenir le tracé des projections on a commuté les entrées des sommateurs [3] et [4] en s'inspirant du tableau de commutation de la figure A.3 (page 177). La figure 2.15 représente diverses courbes réalisées avec le schéma de commutation de la figure 2.13. En haut sont représentées quatre spirales ayant chacune son origine sur un axe de coordonnées. Au milieu — leurs projections axonométriques sur le plan z_1Oz_3 (pour un observateur situé au sommet du cône qu'elles engendrent); en bas — les projections sur le plan z_1Oz_3 (pour un observateur se trouvant à la base du cône). Si l'on rompt les liaisons entre les intégrateurs [5] et [6] aux entrées (17) et (21), les équations initiales de la courbe (2.19) deviennent

$$z_1 = \exp(-\beta t), \quad z_2 = \alpha t, \quad z_3 = \exp(-\beta t). \tag{2.20}$$

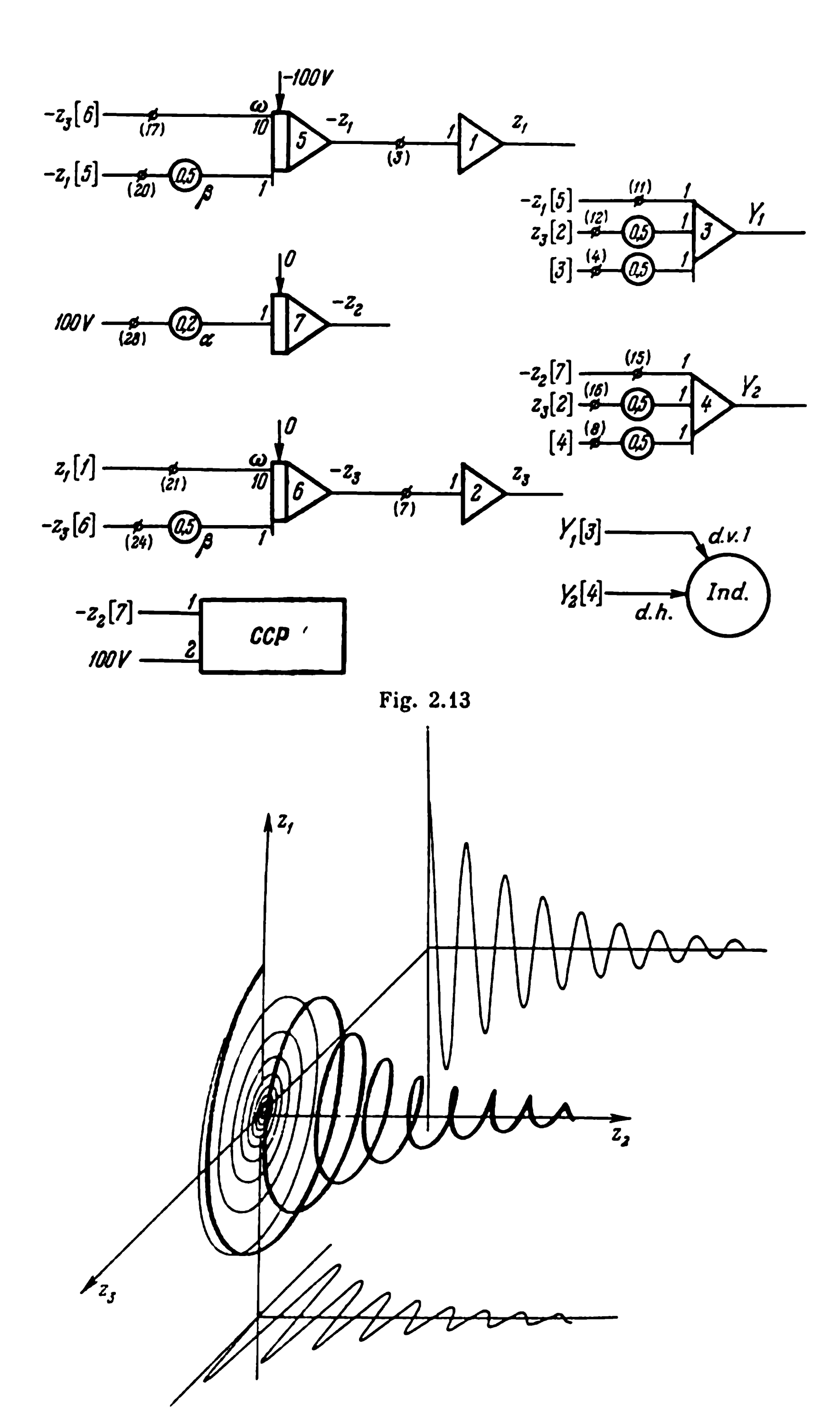


Fig. 2.13

Fig. 2.14

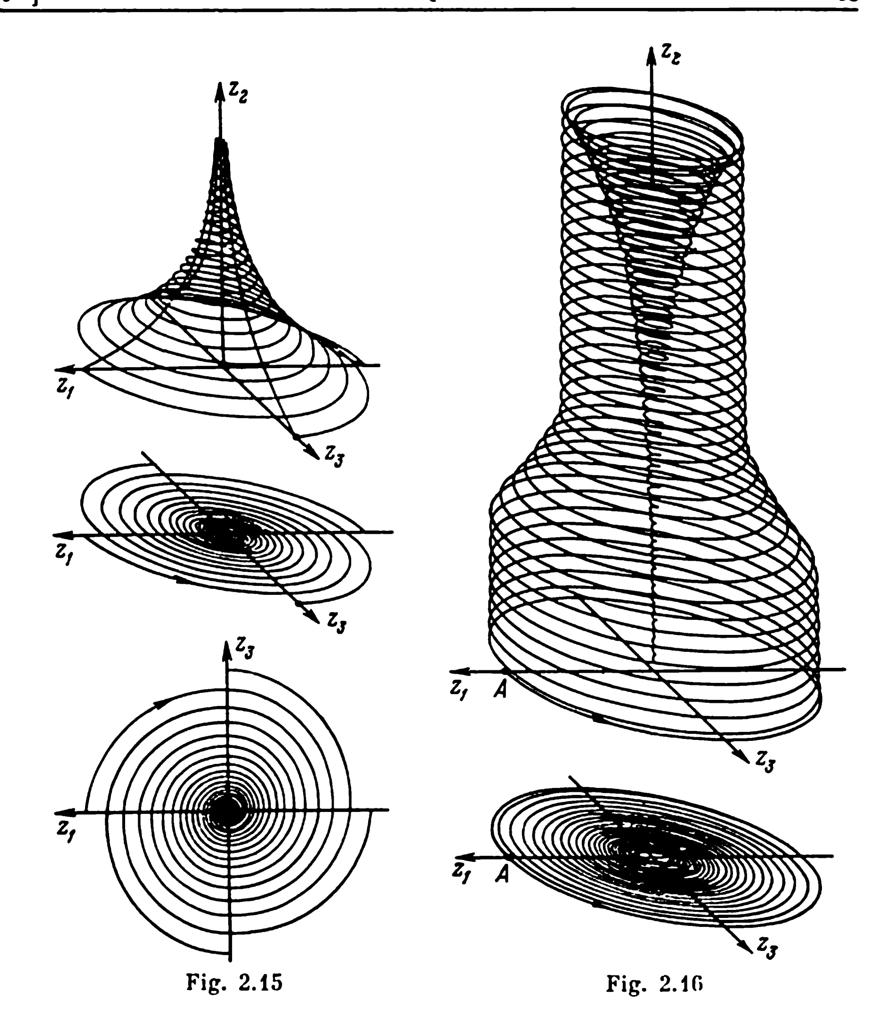


Fig. 2.15

Fig. 2.16

Les courbes correspondantes sont les génératrices du cône engendré par la révolution d'une exponentielle autour de son asymptote Oz_2 (cf. haut de la figure). Si l'on ouvre les liaisons des intégrateurs [5] et [6] aux entrées (20) et (24), on obtient la ligne hélicoïdale

$$z_1 = \sin \omega t, \quad z_2 = \alpha t, \quad z_3 = \cos \omega t. \tag{2.21}$$

La figure 2.16 reproduit les courbes (2.19) et (2.21). Le point représentatif décrit une trajectoire qui commence en A et se déplace dans le sens de la flèche. Au début c'est une ligne hélicoïdale située sur un cylindre; elle se transforme ensuite en une spirale portée par un cône dont la génératrice a la forme d'une exponentielle; la spirale

devient une ligne hélicoïdale qui, à son tour, se transforme en spirale en même temps que α change de signe. Toutes ces transformations ont été effectuées, machine en marche, par rupture et rétablissement des liaisons mentionnées entre les intégrateurs [5] et [6].

Voir le chapitre 4 pour la simulation d'autres courbes gauches.

2.13. Tracer sur l'indicateur électronique les courbes gauches suivantes.

I n d i c a t i o n s. Les courbes 1) à 10) sont simulées à l'aide du schéma du chapitre 4, § 10. Les courbes 11) à 15) à l'aide du schéma du chapitre 4, § 8.

1) $z_1 = \sin 0{,}3t$,
$z_2 = \cos 0{,}3t \cos 10t$,
$z_3 = \cos 0{,}3t \sin 10t$.

2) $z_1 = \sin 10t$,
$z_2 = \cos 10t \cos 0{,}3t$,
$z_3 = \cos 10t \sin 0{,}3t$.

3) $z_1 = \sin 0{,}3t$,
$z_2 = (1 + \cos 0{,}3t) \cos 10t$,
$z_3 = (1 + \cos 0{,}3t) \sin 10t$.

4) $z_1 = \sin 10t$,
$z_2 = (1 + \cos 10t) \cos 0{,}3t$,
$z_3 = (1 + \cos 10t) \sin 0{,}3t$.

5) $z_1 = 0{,}7 \sin 0{,}3t$,
$z_2 = \cos 0{,}3t \cos 10t$,
$z_3 = \cos 0{,}3t \sin 10t$.

6) $z_1 = 0{,}7 \sin 10t$,
$z_2 = \cos 10t \cos 0{,}3t$,
$z_3 = \cos 10t \sin 0{,}3t$.

7) $z_1 = 0{,}4 \sin 0{,}3t$,
$z_2 = (1 + 0{,}4 \cos 0{,}3t) \times$
$\times \cos 10t$,
$z_3 = (1 + 0{,}4 \cos 0{,}3t) \times$
$\times \sin 10t$.

8) $z_1 = 0{,}4 \sin 10t$,
$z_2 = (1 + 0{,}4 \cos 10t) \times$
$\times \cos 0{,}3t$,
$z_3 = (1 + 0{,}4 \cos 10t) \times$
$\times \sin 0{,}3t$.

9) $z_1 = \sin 0{,}3t$,
$z_2 = (1 + 0{,}3 \cos 0{,}3t) \times$
$\times \cos 10t$,
$z_3 = (1 + 0{,}3 \cos 0{,}3t) \times$
$\times \sin 10t$.

10) $z_1 = \sin 10t$,
$z_2 = (1 + 0{,}3 \cos 10t) \times$
$\times \cos 0{,}3t$,
$z_3 = (1 + 0{,}3 \cos 10t) \times$
$\times \sin 0{,}3t$.

11) $z_1 = \exp(-t) \cos 10t$,
$z_2 = \exp(-t)$,
$z_3 = \exp(-t) \sin 10t$.

12) $z_1 = \exp(-t) \cos 10t$
$z_2 = \exp(-2t)$,
$z_3 = \exp(-t) \sin 10t$.

13) $z_1 = \exp(-t) \cos 10t$,
$z_2 = \exp(-0{,}3t) \sin t$,
$z_3 = \exp(-t) \sin 10t$.

14) $z_1 = \exp(-t) \cos 10t$,
$z_2 = \sin t$,
$z_3 = \exp(-t) \sin 10t$.

15) $z_1 = \exp(-t) \cos 10t$,
$z_2 = 1/(1 + t)$,
$z_3 = \exp(-t) \sin 10t$.

CHAPITRE 3

TRAVAUX PRATIQUES

§ 1. Généralités sur le calculateur analogique MH-7M

Le calculateur analogique MH-7M est une machine modulaire de table, composée de 18 amplificateurs opérationnels dont 16 servent à former des opérateurs: sommateurs, intégrateurs, dériveurs, générateurs de fonctions, etc. Il permet de résoudre des systèmes d'équations différentielles non linéaires (jusqu'au sixième ordre) de la forme

$$x_j' = \psi_j (x_1, x_2, \ldots, x_6), \quad x_j (0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6,$$

où $x_j(t)$ sont des fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Si le problème posé nécessite plus d'opérateurs que n'en dispose la machine, on peut adjoindre à cette dernière d'autres machines pour accroître ses performances.

Les éléments de base de la machine sont le bloc principal (résolvant), le bloc d'alimentation et l'indicateur électronique. La figure 3.1 représente le bloc principal et l'indicateur électronique; la figure 3.2, le panneau avant du bloc principal sur lequel sont disposés les éléments destinés à la commande et au contrôle de la machine; la figure 3.3, le panneau de commutation de la machine MH-7M. La description détaillée de la machine MH-7 est donnée dans les « Eléments de simulation ». Les multiplieurs, diviseurs et générateurs de fonctions du calculateur MH-7M sont plus perfectionnés que ceux du MH-7. Ces opérateurs ne se connectant pas comme dans le calculateur MH-7, des modifications appropriées ont été apportées dans le panneau de commutation. Par ailleurs, le calculateur MH-7M utilise le bloc d'alimentation BЭC-1.

Nature et succession des opérations

1. *Mise sous tension.* Avant de brancher la machine il est indispensable de lire la notice d'emploi, les instructions d'exploitation et les mesures de sécurité.

Mettre la source d'alimentation BЭC-1 et l'indicateur électronique sous une tension de 220 volts.

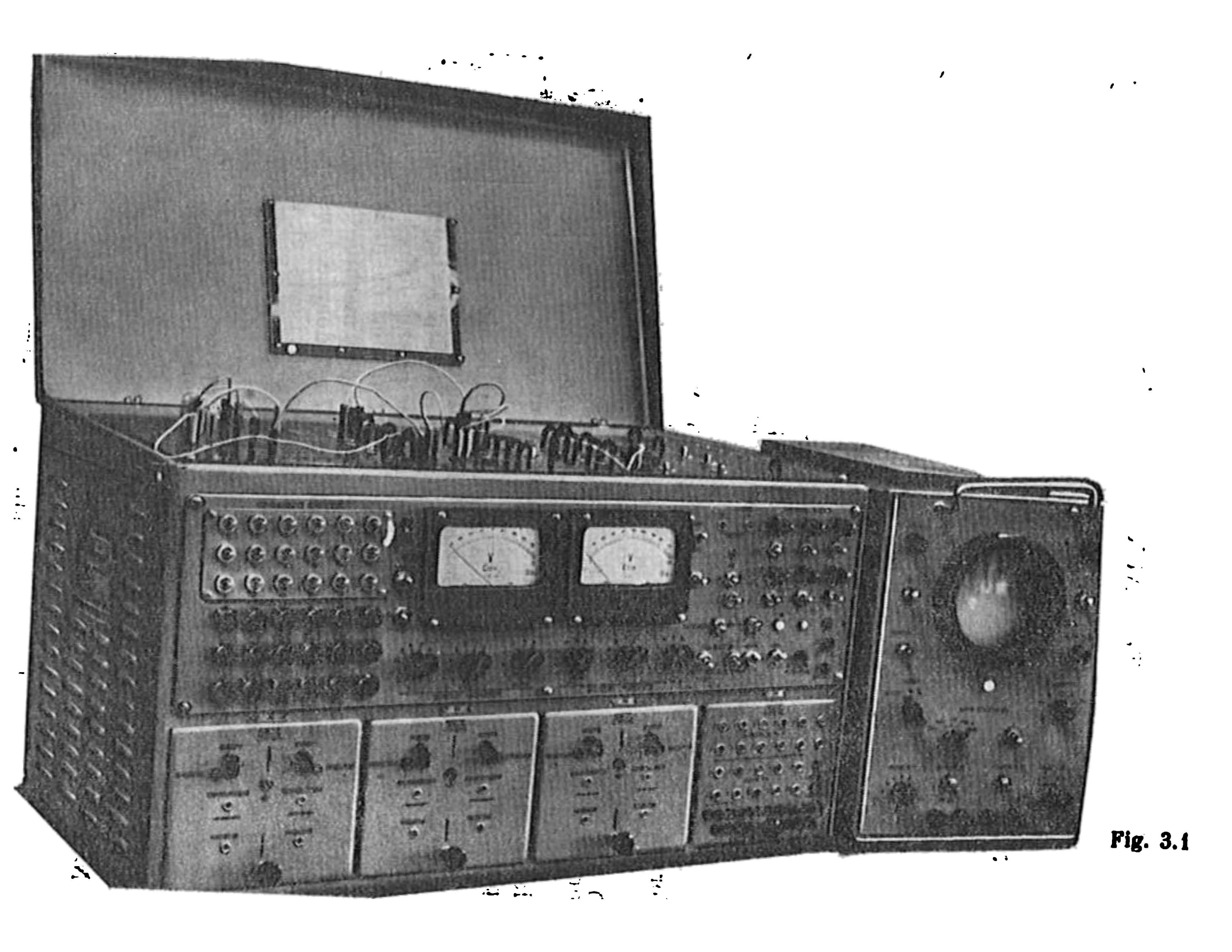


Fig. 3.1

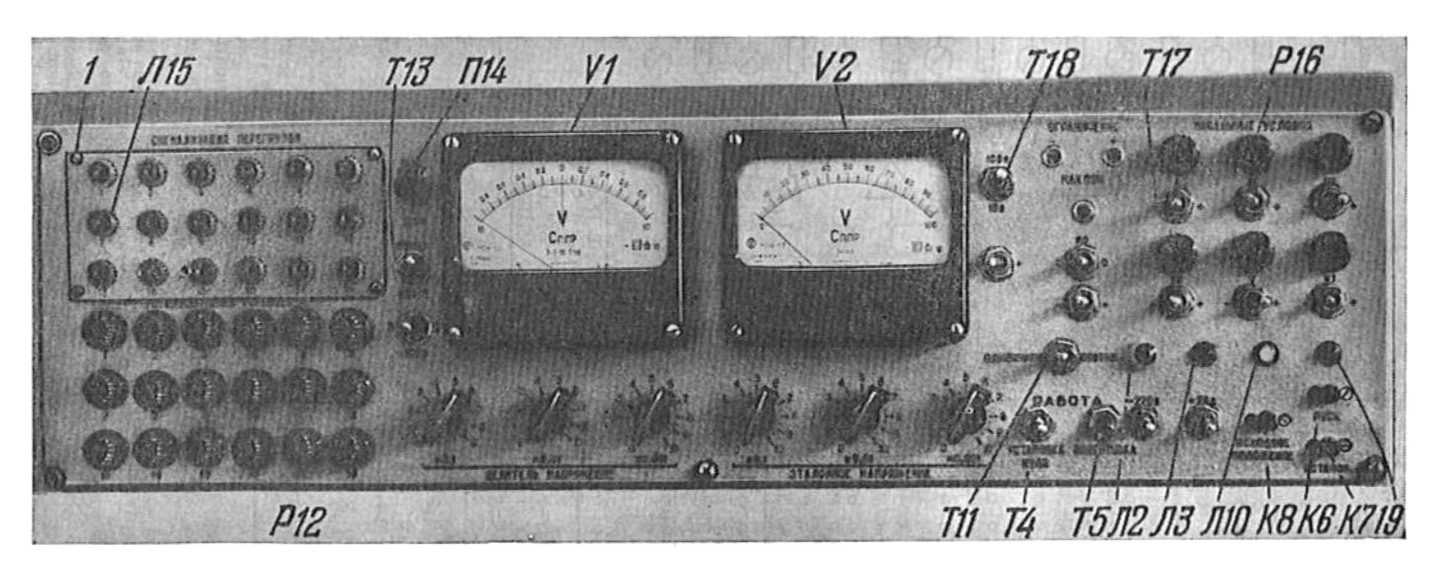

1
Л15
Т13
П14
V1
V2
Т18
Т17
Р16
Р12
Т11
Т4
Т5
Л2
Л3
Л10
К8
К6
К7
19
V
V
РАБОТА

Fig. 3.2

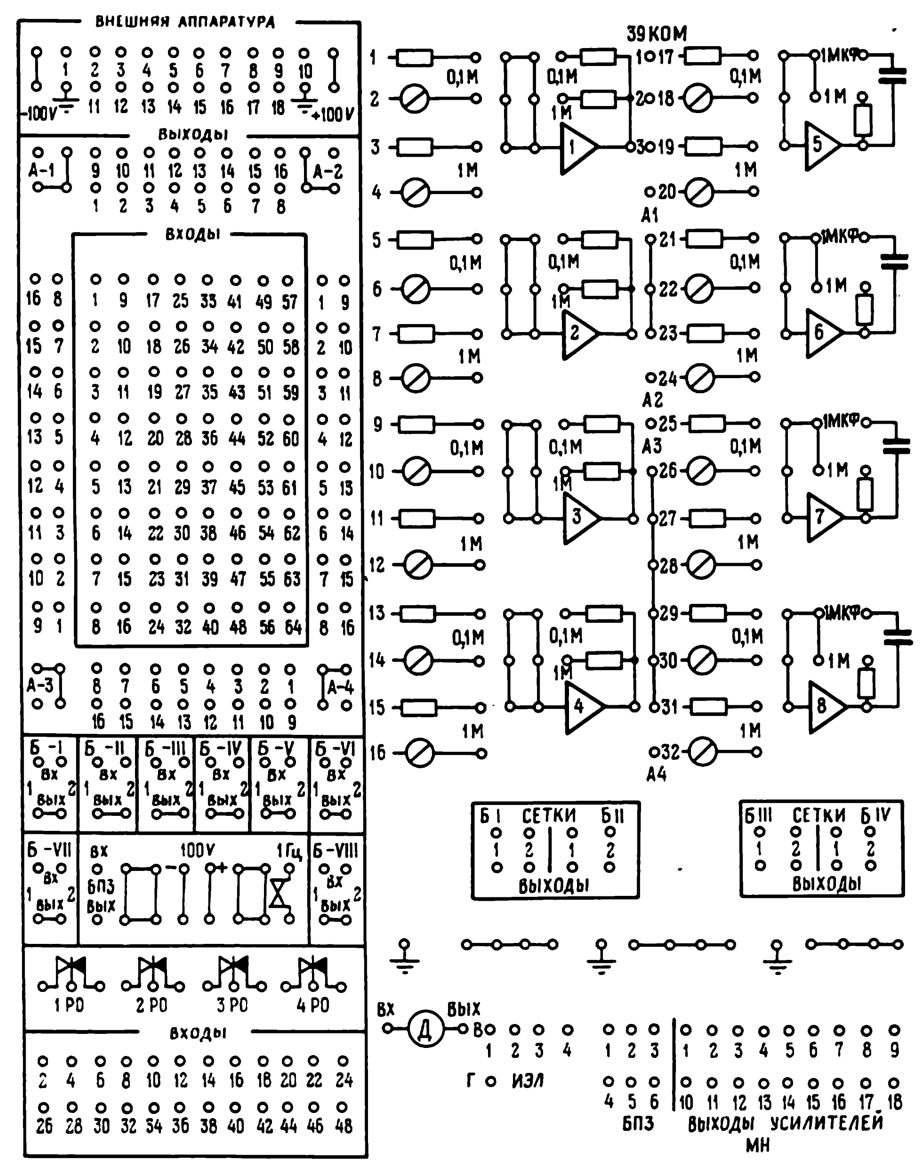
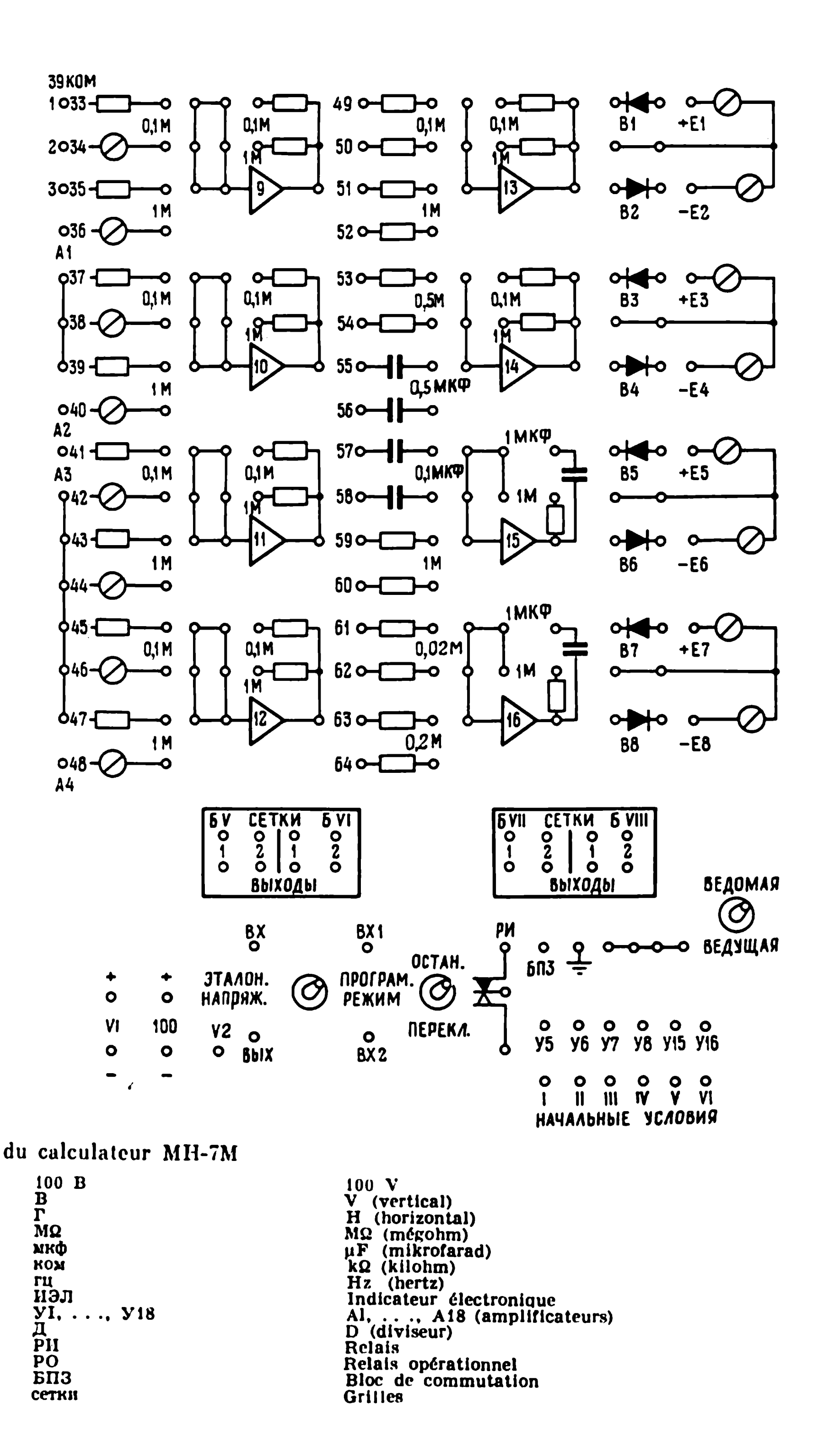


Fig. 3.3.— Panneau de commutation

Внешняя аппаратура	Appareils extérieurs
Выходы	Sorties
Входы	Entrées
Выходы усилителей МН	Sorties des amplificateurs
Эталон. напр.	Tension étalonnée
Прогр. режим	Mode programmé
Остан.	Arrêt
Перекл.	Commutation
Ведомая	Cal. piloté
Ведущая	Cal. pilote
Начальные условия	Conditions initiales
Вых.	Sor.
Вх.	Ent.
Б-I, Б-II, . . ., Б-VIII	B-I, B-II, ..., B-VIII (blocs)



du calculateur MH-7M

100 В	100 V
В	V (vertical)
Г	H (horizontal)
МΩ	MΩ (mégohm)
мкф	μF (mikrofarad)
ком	kΩ (kilohm)
гц	Hz (hertz)
ИЭЛ	Indicateur électronique
У1, . . ., У18	A1, . . ., A18 (amplificateurs)
Д	D (diviseur)
РИ	Relais
РО	Relais opérationnel
БПЗ	Bloc de commutation
сетки	Grilles

Mettre en marche la source d'alimentation. Mettre pour cela en position СЕТЬ (SECTEUR) le tumbler inférieur gauche, situé sur le panneau avant de la source d'alimentation ВЭС-1 : les deux lampes de signalisation des coins supérieurs gauche et droit s'allumeront aussitôt. Au bout d'une ou de deux minutes, mettre le tumbler droit dans la position АНОД (ANODE). S'assurer à l'aide du voltmètre à aiguille incorporé, en modifiant la position du commutateur d'échelles, de l'existence des tensions électriques suivantes: +100 volts, +350 volts, —100 volts, —350 volts. Si les valeurs indiquées par le voltmètre diffèrent des valeurs nominales il est possible de les régler à l'aide des potentiomètres dont les fentes aboutissent au panneau de la source d'alimentation.

Toutes les manipulations ultérieures s'effectuent à l'aide des tumblers et des commutateurs disposés sur le panneau de commande (fig. 3.2) du bloc principal et sur le panneau de commutation (fig. 3.3). Fermer les tumblers ~220 В (220 volts) et =26 В (26 volts) situés en bas et à gauche du panneau du bloc principal : la lampe de signalisation disposée au-dessus du tumbler ~220 В s'allumera. Ceci achève la mise sous tension de la machine. Toutes les opérations nécessitées par la préparation de la machine à la résolution d'un problème quelconque s'effectuent machine branchée.

Pour mettre la machine hors tension on refait le chemin inverse. On ouvre d'abord les tumblers = 26 В et ~ 220 В, ensuite le tumbler АНОД (ANODE) et enfin le tumbler СЕТЬ (SECTEUR).

2. *Réglage des zéros des amplificateurs opérationnels.* Les amplificateurs opérationnels de la machine МН-7М possèdent une dérive du zéro de la tension de sortie. La dérive qui est une source d'erreurs est déterminée par une mesure de la tension de sortie, bornes d'entrée court-circuitées. A défaut de l'éliminer on peut en atténuer les effets pendant un certain temps. Pour ce faire on vérifie périodiquement la valeur de la tension de sortie de l'AO, puis on règle au besoin l'amplificateur opérationnel. Cette opération constitue ce qu'on appelle le réglage des zéros de l'AO.

Le réglage des zéros se fait dans les positions УСТАНОВКА НУЛЯ (RÉGLAGE ZÉRO) et ПОДГОТОВКА (PRÉPARATION) respectivement des tumblers T4 et T5 (cf. fig. 3.2). Il est réalisé avec les 18 boutons P12 des résistances variables. Les boutons sont disposés dans le coin bas gauche du panneau de commande du bloc principal. Chaque bouton porte le numéro de l'amplificateur opérationnel qu'il commande. Pour mesurer la tension de sortie des amplificateurs on utilise le voltmètre V1 (avec le zéro central). Le tumbler T13 doit être en position ИЗМЕРЕНИЕ (MESURE). La sortie de l'amplificateur contrôlé doit être reliée à la douille +V1 (située en bas et à droite du panneau de commutation) du voltmètre VI par un cordon de connexion. (Les sorties des amplificateurs aboutissent au milieu de la partie inférieure du panneau de commuta-

tion.) En tournant le bouton approprié P12 on effectue le réglage du zéro d'abord sur l'échelle 2,5 V (П14 est en position basse), ensuite sur l'échelle 0,1 V (П14 en position haute). Le réglage est terminé lorsque l'aiguille du voltmètre V1 indique le zéro de l'échelle 0,1 V.

3. *Etude de la précision de réglage des tensions constantes à l'aide du diviseur de tension.* Le réglage et la mesure des valeurs constantes arbitraires des tensions électriques constituent une importante phase dans la manipulation de la machine. En calcul analogique, les tensions électriques jouent le rôle de variables mathématiques. Aux tensions constantes correspondent des variables mathématiques constantes.

1) Câbler sur le panneau de commutation le schéma représenté sur la figure 3.4. Le rond contenant la lettre Д désigne un potentiomètre à trois décades dont la borne d'entrée (la douille BX) est raccordée, avec un cordon de connexion, à une douille quelconque du panneau de commutation, portant l'inscription + 100 volts, et la

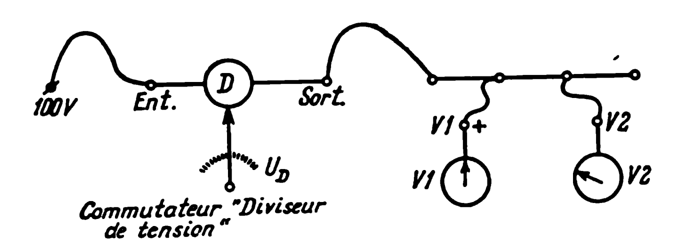


Fig. 3.4

borne de sortie (douille BbIX) est reliée par le répétiteur des sorties à la douille + V1 du voltmètre V1 et à la douille + V2 du voltmètre V2 (zéro à gauche). Les douilles BX (ENT), BbIX (SOR), V1 et V2 sont toutes situées à côté du rond symbolisant le diviseur de tension. Le commutateur ДЕЛИТЕЛЬ НАПРЯЖЕНИЯ (DIVISEUR DE TENSION) est placé sur le panneau avant du bloc principal, sous le voltmètre V1. Le commutateur en question est constitué de trois commutateurs à lamelles: celui de gauche possède une graduation égale au dixième (la tension appliquée étant de 100 volts, la valeur d'une graduation est de 10 volts); celui du milieu, une graduation égale au centième, celui de droite, une graduation égale au millième. Le coefficient de transfert du diviseur de tension est égal à la somme des valeurs indiquées par les trois commutateurs à lamelles. Cette somme est inférieure à l'unité.

2) Afficher les valeurs numériques des tensions u_{Dj} indiquées dans la deuxième colonne du tableau 3.1 à l'aide du DIVISEUR DE TENSION; inscrire au tableau les indications des voltmètres V1 et V2, i.e. les valeurs v_{1j}, v_{2j}. Calculer les erreurs quadratiques

Tableau 3.1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
u_{Dj}	6,3	12,5	30,1	40,5	44,2	61,0	73,2	82,4	98,0	100	
v_{1j}											
v_{2j}											Somme
$(u_{Dj}-v_{1j})^2$											
$(u_{Dj}-v_{2j})^2$											

moyennes

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{D_j}-v_{1j})^2},\quad \sigma_2=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{D_j}-v_{2j})^2}.$$

3) Enumérer et expliquer les causes éventuelles des écarts entre les indications du diviseur de tension et celles des voltmètres V1 et V2.

4. *Etude de la précision d'affichage des tensions constantes avec la source* ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ (TENSION ÉTALONNÉE). La source TENSION ÉTALONNÉE de la machine MH-7M est construite sur la base de l'amplificateur opérationnel [17] suivant le schéma de la figure 3.5, *a*, où la fonction de réaction est assumée par un potentiomètre à trois décades. La tension d'entrée est ordinairement égale à +100 volts ou —100 volts selon le signe de la tension étalonnée. La tension étalonnée de sortie est réglée par modification du coefficient de transfert du potentiomètre à l'aide du commutateur TENSION ÉTALONNÉE situé sur le panneau avant du bloc principal sous le voltmètre V2.

1) Monter le schéma de la figure 3.5, *b*. L'entrée BX (ENT) de TENSION ÉTALONNÉE est disposée à droite des douilles +V1 et V2 à côté du tumbler ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ, ПРОГРАММНЫЙ РЕЖИМ (TENSION ÉTALONNÉE — MODE PROGRAMMÉ) qui doit être mis en position TENSION ÉTALONNÉE. L'entrée BX est raccordée à la plus proche douille +100 volts, entre les douilles +V1 et V2. La sortie BbIX (SOR) de TENSION ÉTALONNÉE est reliée par le répétiteur de sorties aux entrées

des voltmètres V1 et V2. Le tumbler T4 doit être mis en position РАБОТА (CALCUL). La position du tumbler T5 importe peu.

2) Régler à l'aide du commutateur TENSION ÉTALONNÉE

Tableau 3.2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$u_{\text{ét}\,j}$	8,5	19,6	30,8	41,2	49,8	52,5	72,1	72,8	91,0	100	
v_{1j}											
v_{2j}											Somme
$(u_{\text{ét}\,j}-v_{1j})^2$											
$(u_{\text{ét}\,j}-v_{2j})^2$											

les valeurs des tensions $u_{\text{ét}}$ figurant dans la deuxième ligne du tableau 3.2, inscrire au tableau les valeurs v_{1j} et v_{2j} indiquées par les

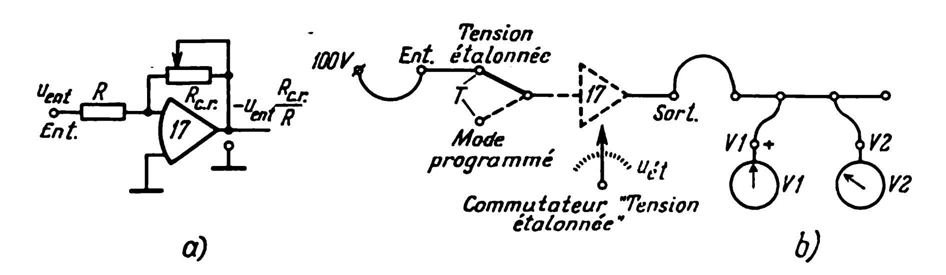


Fig. 3.5

voltmètres V1 et V2.

Calculer les erreurs quadratiques moyennes

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{\text{ét}\,j}-v_{1j})^2},\quad \sigma_2=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{\text{ét}\,j}-v_{2j})}.$$

3) Enumérer et expliquer les causes éventuelles des écarts entre les indications du commutateur TENSION ÉTALONNÉE et les voltmètres V1 et V2.

5. *Détermination de la valeur et de la plage de variation des coefficients de transfert du sommateur* [1] *et de l'intégrateur* [5]. On détermine le coefficient de transfert d'un opérateur à une entrée quelconque en appliquant à ladite entrée une tension constante connue (par exemple, la tension $u_{ét}$ de la source TENSION ÉTALONNÉE) et en mesurant la tension de sortie u_{sor} de l'opérateur. Le quotient $\left|\frac{u_{sor}}{u_{sor}}\right|$ est numériquement égal au coefficient de transfert cherché. La détermination des coefficients de transfert des opérateurs s'effectue dans la position CALCUL du tumbler T4 et PRÉPARATION du tumbler T5. Dans cette position des tumblers T4 et T5, les condensateurs (1 μF) sont automatiquement déconnectés dans les circuits de réaction de tous les intégrateurs et à leur place sont branchées des résistances équivalentes (sur le plan du coefficient de transfert) de 1 MΩ.

1) Déterminer le coefficient de transfert à l'entrée (1) du sommateur [1]. A cet effet on organise d'abord l'entrée (1) du sommateur [1], i.e. l'entrée de l'AO1 est reliée par un cavalier ou un cordon de commutation à la douille de la résistance d'entrée de 0,1 MΩ portant le numéro 1. Ensuite à l'entrée (1) qui est située au centre du champ de composition (les 64 entrées sont comprises dans le rectangle portant l'inscription ВХОДЫ) on applique la tension étalonnée $u_{ét}$ = 10 volts. Avec le voltmètre V2 on mesure la tension

Tableau 3.3

Sommateur [1]			Intégrateur sommateur [5]		
Entrée	Contre-réaction		Entrée	Contre-réaction	
	1 MΩ	0,1 MΩ		1 μF	1 MΩ
(1)			(17)		
(2)			(18)		
(3)			(19)		
(4)			(20)		

à la sortie du sommateur [1] pour diverses valeurs des résistances de contre-réaction (1 MΩ, 0,1 MΩ). Calculer les valeurs des coefficients de transfert correspondant aux résultats des mesures et les porter dans le tableau 3.3.

2) Répéter 1) pour les entrées (2), (3), (4), (17), (18), (19), (20) indiquées dans le tableau 3.3.

Modifier si nécessaire la tension $u_{ét}$ appliquée aux entrées des opérateurs. Indiquer les valeurs maximale et minimale des coefficients de transfert aux entrées paires.

6. *Mise au point des coefficients de transfert des opérateurs.* On demande de monter le schéma de commutation de la figure 3.6, *a* et d'afficher les coefficients de transfert indiqués dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4

Variante / Coefficient	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	0,12	0,18	0,33	0,51	0,72	0,27	0,17	0,63	0,23	0,24
β	0,6	0,55	0,2	0,12	0,13	0-33	0,41	0,08	0,39	0,36
γ	0,72	0,99	0,66	0,612	0,936	0,891	0,697	0,504	0,897	0,844

La composition du schéma commence par l'organisation des opérateurs. S'agissant des sommateurs et intégrateurs, le terme « organisation » signifie : le branchement des entrées indiquées dans

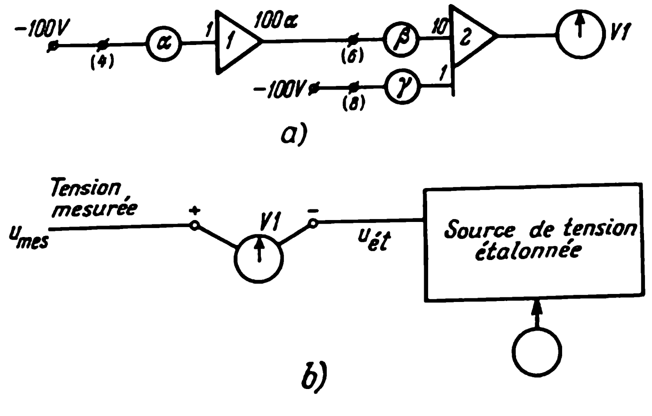


Fig. 3.6

le schéma à l'entrée de l'AO (organisation des entrées), la connexion des éléments constituant les circuits de réaction (organisation des réactions). Toutes les connexions électriques sont effectuées sur le

panneau de commutation à l'aide de cavaliers ou de cordons de commutation.

Le câblage ultérieur du schéma de commutation comporte le branchement des entrées de certains opérateurs aux sorties d'autres (organisation des connexions des opérateurs). Cette opération est effectuée sur le champ de composition qui occupe la partie gauche du panneau de commutation. Le champ de composition est l'aboutissement des entrées et sorties des opérateurs. Il est compris dans le rectangle portant l'inscription ВЫХОДЫ (SORTIES). A l'intérieur se trouve un autre rectangle portant l'inscription ВХОДЫ (ENTRÉES), qui contient toutes les 64 douilles d'entrée des opérateurs. Entre le rectangle intérieur et le rectangle extérieur se trouvent les sorties des 16 opérateurs. Celles-ci sont reproduites en quatre exemplaires pour faciliter la commutation. Les entrées et sorties sont reliées par des cordons de commutation.

Les coefficients de transfert des sommateurs et intégrateurs sont mis au point dans la position CALCUL du tumbler T4 et PRÉPARATION du tumbler T5. Les coefficients de transfert des sommateurs 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 50 et les coefficients de transfert des intégrateurs 1, 2, 5, 10, 50 sont établis par une organisation appropriée des entrées et des circuits de réaction des opérateurs. Si l'on a besoin d'autres coefficients de transfert, on les établit à l'aide des potentiomètres. Pour faciliter la mise au point des coefficients, toutes les entrées des potentiomètres ont été disposées dans la partie gauche inférieure du panneau de commutation ; ceci permet d'établir les coefficients sans rompre les liaisons organisées sur le champ de composition. Les douilles numérotées 2, 6, 10, . . ., 46 permettent d'afficher un coefficient de transfert quelconque compris entre 0 et 10, les douilles 4, 8, 12, . . ., 48, un coefficient de transfert compris entre 0 et 1.

Supposons que l'on veuille attribuer le coefficient 6 à l'intégrateur [5]. Il faut pour cela utiliser l'entrée (18) et appliquer à la douille correspondante une tension étalonnée de 10 volts. On mesure la tension de sortie de l'intégrateur [5] avec un voltmètre et on déplace le curseur du potentiomètre à l'aide d'un tournevis placé dans la fente jusqu'à ce que la tension régulée soit égale à —60 volts. Si l'on veut obtenir un coefficient de transfert égal à 0,6 il est alors plus rationnel de se servir de l'entrée (20) et d'appliquer à la douille correspondante non plus 10 mais 100 volts pour obtenir les mêmes —60 volts à la sortie de l'intégrateur [5].

Organiser les entrées, les circuits de réaction et les connexions entre les opérateurs d'après le schéma de commutation de la figure 3.6, *a*, afficher les coefficients de transfert α, β, γ correspondant à la variante choisie dans le tableau 3.4. Si le schéma est correctement monté et les coefficients de transfert correctement mis au point, le voltmètre indique une tension nulle même sur l'échelle 2,5 V.

La précision de la mise au point des coefficients de transfert dépend de celle de la mesure des tensions électriques. Cette précision peut être accrue par l'application de la méthode de compensation. Soit u_{mes} la tension électrique à mesurer (cf. fig. 3.6, *b*). Cette tension est appliquée à l'entrée +V1 du voltmètre V1. Le voltmètre V1 est mis au mode КОМПЕНСАЦИЯ (COMPENSATION) par action sur le tumbler T13, puis son entrée —V1 est raccordée à la sortie de TENSION ÉTALONNÉE. La source de tension étalonnée doit délivrer une tension électrique $u_{ét}$ de même signe que u_{mes}. En actionnant les commutateurs à décades on amène l'aiguille du voltmètre V1 au zéro d'abord sur l'échelle 100 volts, puis sur l'échelle 2,5 volts et enfin sur l'échelle 0,1 volt. Ce qui traduit l'égalité $u_{mes} = u_{ét}$. La valeur numérique de $u_{ét}$ est déterminée par la position du commutateur TENSION ÉTALONNÉE.

7. *Comportement de l'opérateur* [5] *en dehors de la plage* ±100 *volts.* La tension de sortie des AO équipant le calculateur MH-7M varie entre — 100 volts et +100 volts. En dehors de cet intervalle, les

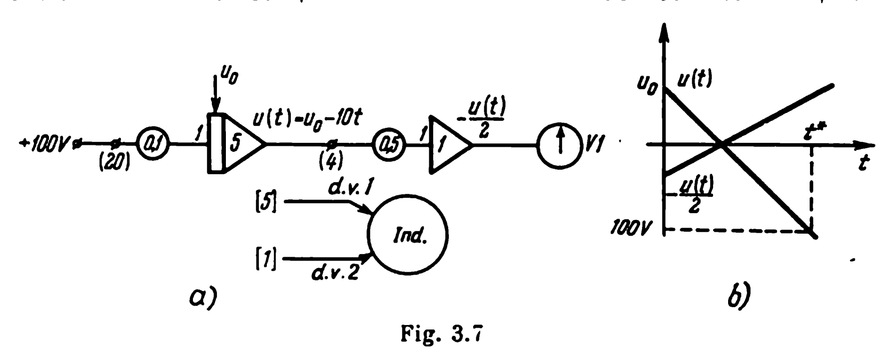


Fig. 3.7

calculs sont entachés d'erreurs supplémentaires dues à des perturbations non linéaires se manifestant dans le circuit électronique. La sortie de la variable machine de la plage ±100 volts est la conséquence d'une erreur dans le choix des échelles. L'opérateur humain contrôle la plage de fonctionnement de chaque AO à l'aide des lampes à néon branchées à la sortie de ce dernier. Les lampes s'allument dès que la tension de sortie des AO est de ±105 volts. Les 18 lampes au néon L15 sont disposées dans le coin supérieur gauche du panneau avant du bloc principal (cf. fig. 3.2). Elles portent l'inscription СИГНАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕГРУЗОК (SIGNALISATION SURCHARGE).

On se propose de déterminer la valeur de la tension de sortie de l'intégrateur [5] à l'instant précis où la lampe s'allume. On se servira du schéma de la figure 3.7, *a*. Appliquons une tension de +100 V à l'entrée (20) de l'intégrateur [5] par un potentiomètre de coefficient de transfert 0,1.

L'intégrateur délivre la variable machine $u(t) = u_0 - 10t$, où u_0 est la condition initiale.

Quelle que soit la condition initiale u_0, il arrive un instant $t = t^*$ tel que $|u(t)| > 100$ volts (cf. fig. 3.7, *b*). Si $u_0 = 0$ cette inégalité est réalisée au bout de 10 secondes.

A l'instant où la lampe de signalisation s'allume on ne peut mesurer la tension de sortie de l'intégrateur [5] avec V1 ou V2 puisqu'elle est supérieure à 100 volts. La variable $u(t)$ est appliquée à l'entrée (4) de l'amplificateur d'échelle [1] par un potentiomètre de coefficient de transfert 0,5, de sorte qu'à la sortie de [1] on mesure la variable $-u(t)/2$ avec V1.

La donnée des conditions initiales de tous les intégrateurs et, en particulier, de la condition initiale u_0 de [5] s'effectue dans la position РАБОТА (CALCUL) des tumblers T4 et T5. Les douilles У5, У6, У7, У8, У15, У16 des conditions initiales des intégrateurs [5], [6], [7], [8], [15], [16] disposées dans la partie inférieure droite du panneau de commutation sont reliées par des cavaliers ou des cordons aux douilles de sortie I, II, III, IV, V, VI des potentiomètres d'affichage des conditions initiales. Les sorties des intégrateurs sont connectées à tour de rôle par des cordons extérieurs à l'un des voltmètres. En déplaçant les curseurs des potentiomètres à l'aide des boutons P16 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ (CONDITIONS INITIALES), on obtient la valeur désirée de la tension initiale à la sortie des intégrateurs. Les six boutons P16 sont disposés dans le coin supérieur droit du bloc principal. Les manettes des potentiomètres portent les mêmes chiffres romains I, II, III, IV, V, VI que les sorties des potentiomètres. Sous chaque bouton P16 se trouve un tumbler T17 pour la donnée du signe de la condition initiale.

Dans le schéma de la figure 3.7, *a* les sorties de l'intégrateur [5] et de l'amplificateur d'échelle [1] sont reliées aux douilles B1 et B2 des entrées de déviation verticale de l'indicateur électronique qui sont situées dans la partie inférieure du panneau de commutation à côté et légèrement à droite des douilles BX (ENT) et BbIX (SOR) du diviseur de tension Д.

Les variables $u(t)$ et $-u(t)/2$ sont observées sur l'écran de l'indicateur. Celui-ci est branché lorsque le tumbler supérieur droit se trouve dans la position SECTEUR. La lampe de signalisation placée au centre du panneau, au-dessus de l'écran, s'allume; au bout d'une ou de deux minutes on amène le tumbler supérieur gauche dans la position ЛУЧ (FAISCEAU). Pour résoudre un problème en une seule fois, il faut mettre le tumbler T11 dans la position ОДНОКРАТН. (MONOCOURSE). Il faut veiller à ce que le commutateur РЕЖИМ (MODE) occupe la position MONOCOURSE. Pour observer simultanément sur l'écran de l'indicateur deux variables machine appliquées aux entrées B1 et B2, on utilise le tumbler КОММУТАТОР (COMMUTATEUR) qui se trouve en bas du panneau de l'indi-

cateur. Si le tumbler occupe l'autre position, seule la variable appliquée sur B1 est visualisée sur l'écran.

Lorsqu'on observe une variable machine, la durée de balayage borizontal doit être légèrement supérieure à la durée de résolution du problème. Pour modifier la durée de balayage on dispose de deux interrupteurs ВРЕМЯ РАЗВЕРТКИ (DURÉE DE BALAYAGE): celui de gauche opérant par bonds, celui de droite, de façon continue.

Composer le schéma de commutation (fig. 3.7, *a*) et établir les coefficients de transfert requis (T4 — CALCUL, T5 — PRÉPARATION). Brancher l'indicateur, le mettre au mode du bloc principal, brancher le commutateur. Faire varier les conditions initiales de l'intégrateur [5] (T4 — CALCUL, T5 — CALCUL), observer les variations sur l'écran et sur le voltmètre V1. Régler la durée de balayage en procédant à quelques essais de mise en marche de la machine par action sur le bouton K6 — ПУСК (MARCHE). Faire $u_0 = 0$, $u_0 = +50$ volts, $u_0 = -50$ volts, déterminer la tension d'allumage de la lampe au néon. Visualiser les courbes $u(t)$ et $-u(t)/2$ sur l'écran.

8. *Etude du circuit de commande préprogrammée* (CCP) *en mode d'arrêt.* Le circuit de commande préprogrammée est organisé sur

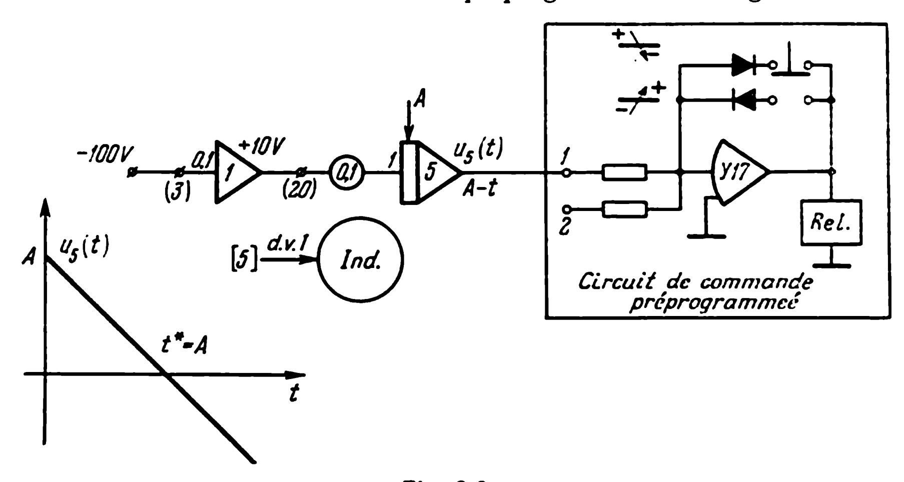


Fig. 3.8

la base du 17-ème amplificateur opérationnel. Pour mettre cet amplificateur en circuit on amène le tumbler ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ — ПРОГРАММНЫЙ РЕЖИМ (TENSION ÉTALONNÉE — MODE PROGRAMMÉ) dans la position MODE PROGRAMMÉ. Le tumbler ОСТАНОВ — ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ (ARRÊT — COMMUTATION) qui se trouve à côté et à droite est mis dans la position ARRÊT. Le CCP stoppe alors automatiquement la machine à l'aide

des relais à contacts (qui en sont une partie intégrante) à l'instant où la variable appliquée aux entrées BX1 et BX2 du CCP change de signe. Avec le tumbler « + — » qui se trouve au-dessus du tumbler T11 sur le panneau avant du bloc principal on peut changer la polarité de la diode dans le circuit de réaction de l'AO [17] (cf. fig. 3.8). On distingue deux cas de changement de signe de la variable d'entrée du CCP : la variable s'annule et devient négative, la variable s'annule et devient positive.

Le schéma de la figure 3.8 stoppe automatiquement la machine à un instant t^* numériquement égal à la condition initiale A de l'intégrateur [5]. En effet (cf. graphe), la variable $u_5(t) = A - t$ devient négative à partir de $t^* = A$.

Composer le schéma de commutation de la figure 3.8, relier la sortie de [5] à l'entrée BX1 du CCP. Observer sur l'indicateur la variable $u_5(t)$ pour différentes valeurs numériques de la condition

Tableau 3.5

j	1	2	3	4	5	6	
A_j	5	10	15	20	25	30	
t_j							Somme
$(A_j - t_j)^2$							

initiale $u_5(0) = A_j$ (elles sont indiquées dans la deuxième ligne du tableau 3.5). Mesurer avec un chronomètre le temps t_j écoulé entre la mise en marche et l'arrêt automatique de la machine. Compléter le tableau 3.5.

Calculer les erreurs quadratiques moyennes avec la formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}(A_j - t_j)^2}.$$

Enumérer et expliquer les causes éventuelles de l'écart entre les valeurs A_j et t_j.

9. *Etude de la précision de la solution machine d'une équation différentielle.* La figure 3.9, *a* représente un schéma de commutation comprenant un intégrateur [7] soumis à une réaction à l'entrée (28) par l'intermédiaire d'un potentiomètre de coefficient de transfert 0,3. On s'assure sans peine que la variable machine $u_7(t)$ vérifie l'équa-

tion différentielle

$$\frac{du_7}{dt} = -0{,}3u_7, \quad u_7(0) = 100\,\text{V},$$

dont la solution analytique est

$$u_7(t) = 100 \exp(-0{,}3t).$$

La courbe intégrale est représentée sur la figure 3.9, *b*. On se propose de comparer la solution exacte $u_7(t)$ avec la solution machine. Les

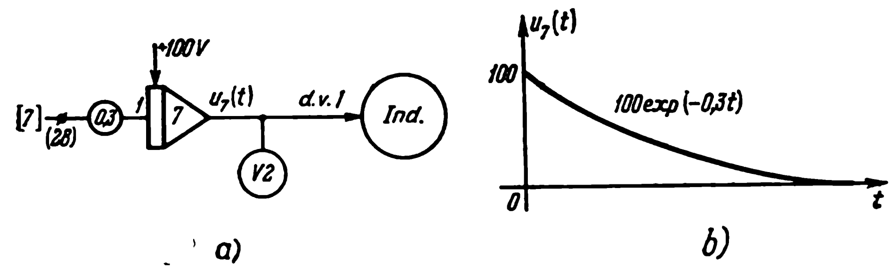


Fig. 3.9

valeurs exactes de la solution u_{7j} correspondant aux valeurs discrètes suivantes 0, 1, 2, . . ., 9 de la variable indépendante t_j sont reproduites dans la deuxième ligne du tableau 3.6.

Tableau 3.6

t_j [s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
u_{7j}	100	74,1	54,9	40,7	30,1	22,3	16,5	12,3	9,1	6,7	
v_{7j}											Somme
$(u_{7j}-v_{7j})^2$											

Monter le schéma de commutation de la figure 3.9, *a*. Mesurer avec le voltmètre V2 les valeurs v_{7j} correspondant aux valeurs de t_j indiquées dans la première ligne du tableau. Calculer l'erreur quadratique moyenne avec la formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{7j}-v_{7j})^2}.$$

Enumérer et expliquer les causes éventuelles des écarts entre u_{7j} et v_{7j}.

Il est recommandé d'utiliser le procédé suivant pour stopper la machine MH-7M au bout d'une seconde pour mesurer les variables machine. Presser le bouton K6 — ПУСК (MARCHE). Presser le bouton K7 — ОСТАНОВ (ARRÊT) dès que la lampe de signalisation L9 s'allume. Le schéma de commande du calculateur MH-7M est conçu de telle sorte que la machine s'arrête au bout d'une seconde. Les valeurs numériques prises par les variables au bout d'une seconde sont mésurées avec un voltmètre. On remet la machine en marche, on l'arrête en pressant sur le bouton K7 dès que la lampe L9 s'allume puis on mesure les valeurs des variables machine pour $t = 2$ s, et ainsi de suite.

10. *Intégration d'une équation finie avec un circuit de commande préprogrammée.* Le schéma de commutation de la figure 3.10, *a* permet de trouver la racine de l'équation

$$100 \exp(-0{,}1t) = t.$$

En effet, l'intégrateur [8] résout l'équation différentielle

$$\frac{du_8}{dt} = -0{,}1u_8, \quad u_8(0) = 100\,\text{V}.$$

La solution analytique est $u_8(t) = 100 \exp(-0{,}1t)$. L'intégrateur [5] délivre la variable $u_5(t) = -t$. L'addition des variables $u_5(t)$

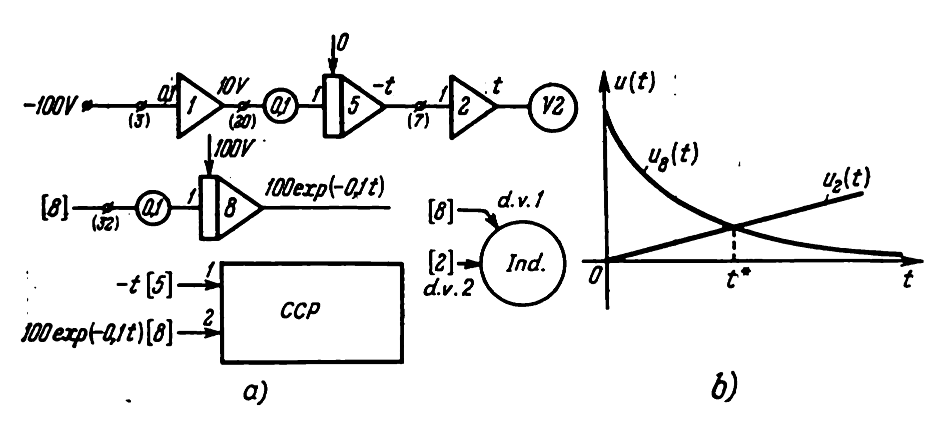


Fig. 3.10

et $u_8(t)$ provoque la réponse du CCP et l'arrêt de la machine à l'instant où $u_5(t) + u_8(t) = 0$, i.e. lorsque $-t + 100 \exp(-0{,}1t) = 0$. La valeur de la racine de l'équation est mesurée avec le voltmètre V2. Les variables $u_2(t)$ et $u_8(t)$ sont représentées sur l'écran comme l'indique la figure 3.10, *b*.

Monter le schéma de commutation de la figure 3.10, *a* et déterminer la valeur numérique de la racine. Vérifier si la solution est exacte en utilisant la table de la fonction exp $(-t)$.

11. *Etude de la précision de la multiplication.* Composer à cet effet le schéma de commutation de la figure 3.11, *a*. L'AO [2] du multiplieur B-II délivre la variable $u_2(t) = 10^{-2}u_6^2(t)$; l'AO [4] du multiplieur B-IV la variable $u_4(t) = 10^{-4}u_6^3(t)$. Les variables $u_6(t)$, $u_2(t)$, $u_4(t)$ sont reproduites sur l'écran (cf. fig. 3.11, *b*) pour

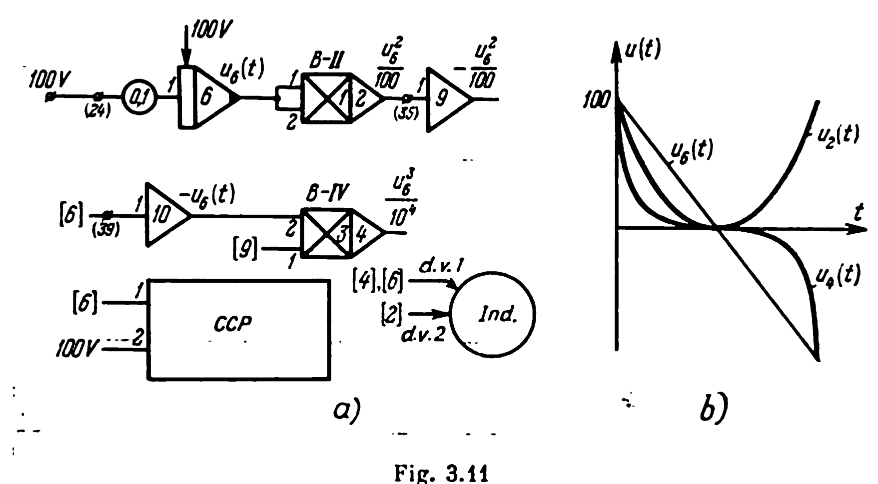


Fig. 3.11

faciliter le contrôle visuel du fonctionnement du schéma. Le CCP permet de limiter à 20 secondes la durée de reproduction des variables. Stopper et remettre la machine en marche toutes les secondes, mesurer et porter dans le tableau 3.7 les valeurs des variables v_{6j}, v_{2j}, v_{4j} correspondant aux valeurs t_j indiquées dans la première ligne. Les lignes 2, 5, 8 reproduisent les valeurs exactes (théoriques) des variables u_{6j}, u_{2j}, u_{4j}. Calculer les erreurs quadratiques moyennes avec les formules

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{6j}-v_{6j})^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{2j}-v_{2j})^2},$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(u_{4j}-v_{4j})^2}.$$

Enumérer et expliquer les causes éventuelles des erreurs.

Le multiplieur-diviseur (MD) du calculateur MH-7M est commuté sur le panneau de commutation. Il utilise deux amplificateurs opé-

Tableau 3.7

1	t_j [s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	u_{6j}	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	
3	v_{6j}											Some
4	$(u_{6j}-v_{6j})^2$											
5	u_{2j}	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	
6	v_{2j}											Somme
7	$(u_{6j}-v_{2j})^2$											
8	u_{4j}	100	72,9	51,2	34,3	21,6	12,5	6,4	2,7	0,8	0,1	
9	v_{4j}											Somme
10	$(u_{4j}-v_{4j})^2$											

rationnels supplémentaires. Ainsi pour organiser le multiplieur B-IV (fig. 3.11, *a* et 3.12) il faut effectuer les connexions indiquées sur la figure 3.13, *a*. Le multiplieur B-IV est construit sur la base des AO [3] et [4]. Le panneau de commutation (cf. fig. 3.3) comporte

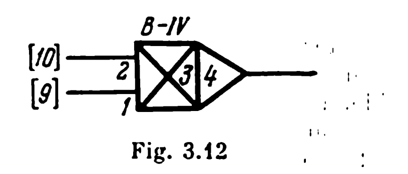


Fig. 3.12

un rectangle СЕТКИ, ВЫХОДЫ, Б-III, Б-IV (GRILLES, SORTIES, B-III, B-IV) avec 4 paires de douilles. Les MD sont disposés en bas du bloc principal sous le panneau de commande. Ils font bloc avec les générateurs de fonctions non linéaires. Ils portent des numéros pairs et les générateurs de fonctions, des numéros impairs. Le MD peut multiplier ou diviser. Pour choisir entre ces deux opérations, on dispose d'un commutateur ou de deux tumblers placés à l'arrière du MD à côté des prises. Pour commuter les tumblers il faudra donc retirer le MD de la machine. Les entrées 1 et 2 du MD et ses sorties dédoublées (fig. 3.13, *b*) sont placées sous le champ de

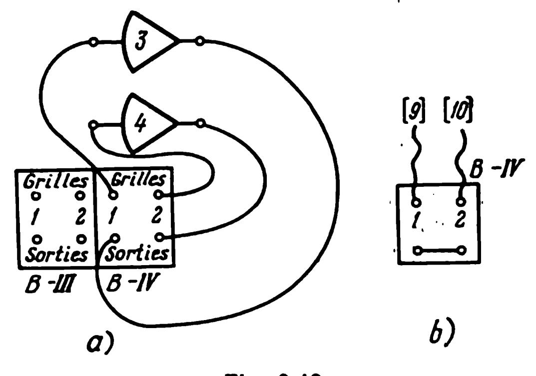


Fig. 3.13

composition dans un rectangle portant l'inscription B-IV. Par ailleurs toute sortie de l'AO [4] est sortie du B-IV. Le MD est tel que l'on peut attribuer n'importe quel signe au produit effectué. Le signe est affecté par commutation des douilles sur la face du MD.

Pour diviser, on envoie le dividende à l'entrée (1) du MD et le diviseur à l'entrée (2).

12. *Etude de la division*. Commuter le bloc B-IV sur la division (cf. fig. 3.11, *a*). L'échelle du diviseur étant égale à 10, l'AO [4]

doit théoriquement délivrer la variable

$$u_4(t) = \frac{10u_6^2(t)}{100u_6(t)} = 0{,}1u_6(t).$$

Visualiser les variations de u_6, u_2, u_4 en changeant alternativement (par commutation des opérateurs) les signes du dividende et du diviseur. Interpréter les résultats obtenus et les comparer avec les théoriques. Formuler la règle du signe du quotient en fonction des signes du dividende et du diviseur. Interpréter le résultat de la division dans le cas où le diviseur est une variable machine comprise entre —10 et +10 volts.

13. *Remise à zéro des amplificateurs.* Mettre à zéro les amplificateurs opérationnels et expliquer la « dérive » des zéros.

§ 2. Technique de composition des schémas de commutation sur le calculateur MH-7M

Les schémas de commutation sont câblés sur le panneau de commutation, machine branchée (T4 — RÉGLAGE ZÉROS, T5 — PRÉPARATION). On recommande la succession suivante.

1) Organiser les entrées et les circuits de réaction des opérateurs sur le panneau de commutation comme l'indique le schéma de commutation. Il est conseillé de signaler sur le schéma l'organisation de chaque entrée pour éviter toute confusion.

2) Organiser les connexions entre les opérateurs sur le champ de composition. Prendre les mêmes précautions que précédemment.

3) Régler les zéros des 18 amplificateurs opérationnels.

4) Etablir les coefficients de transfert exigés des opérateurs (T4 — CALCUL, T5 — PRÉPARATION).

5) Organiser les connexions omises dans 2) et assurant l'alimentation en tensions constantes.

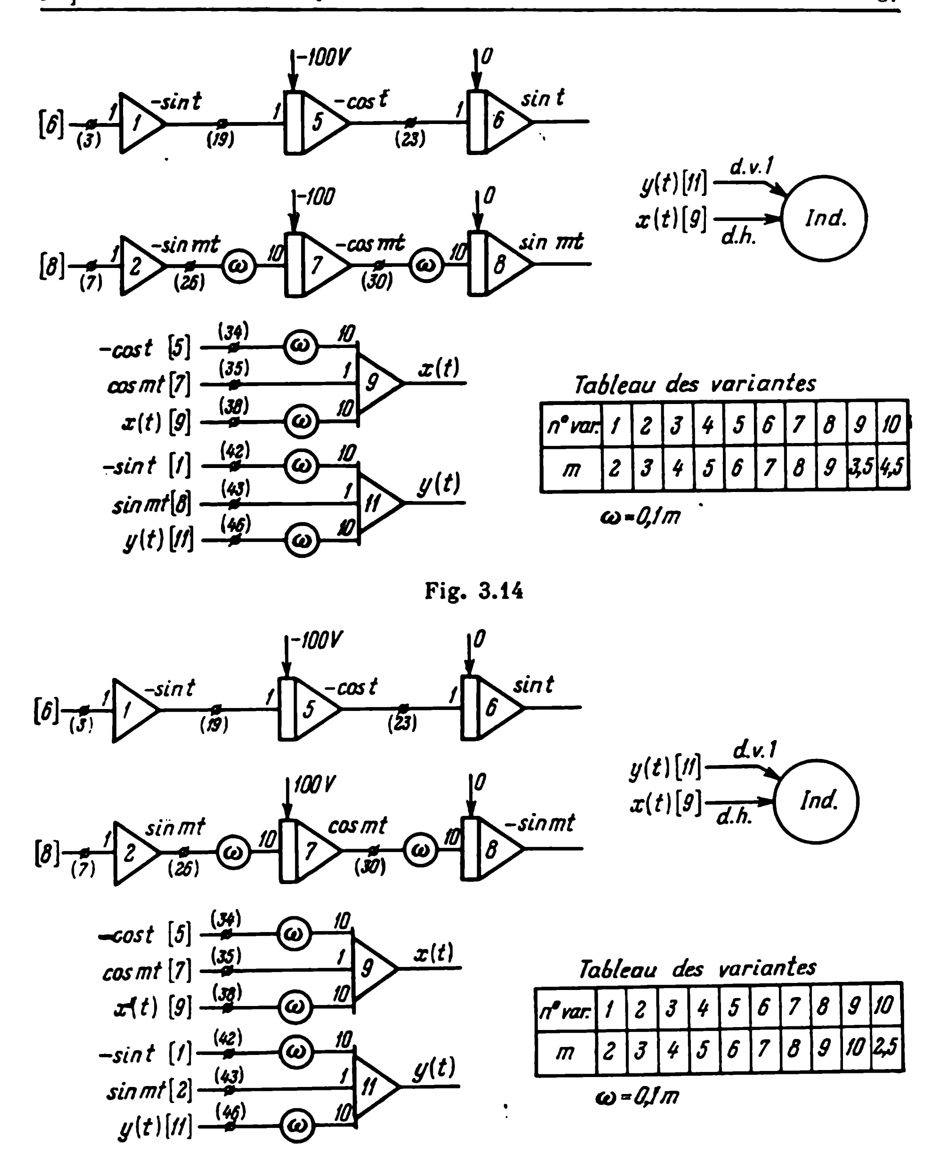
6) Donner les conditions initiales des intégrateurs (T4 — CALCUL, T5 — CALCUL).

7) Régler l'indicateur électronique: mode de travail, durée du balayage et amplification des entrées verticale et horizontale.

Nature et succession des opérations. Composer trois schémas de commutation: le premier étant un des schémas des figures 3.14 à 3.17 pour une variante quelconque du tableau des variantes; le second, une variante du schéma de la figure 3.18 pour toutes les valeurs des paramètres des courbes; le troisième, une variante du schéma de la figure 3.19.

Chaque schéma reproduit une courbe plane. La visualiser sur l'écran, puis la tracer à l'aide d'un traceur à deux coordonnées.

Les schémas des figures 3.14 à 3.17 ne contiennent que des opérateurs linéaires, des sommateurs et des intégrateurs, et reproduisent des courbes appelées *cycloïdes*.



n° var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	3	4	5	6	7	8	9	3,5	4,5

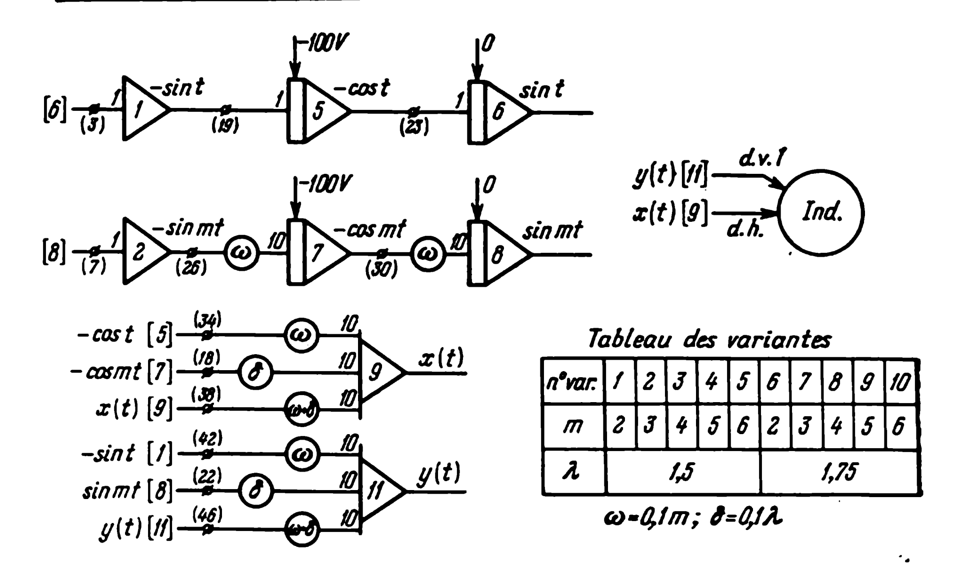
Fig. 3.14

n° var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2,5

Fig. 3.15

On appelle *hypocycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle roulant intérieurement, sans glisser, sur un autre cercle.

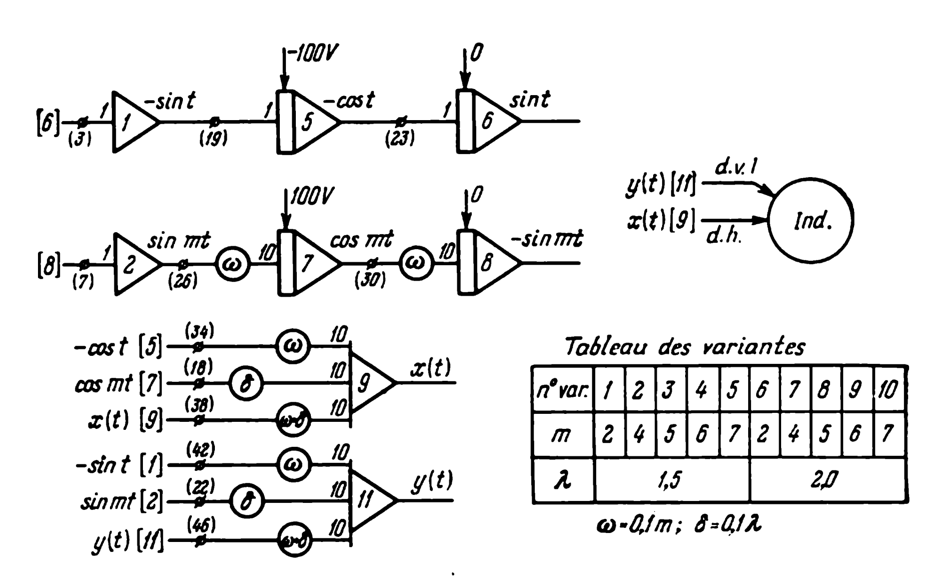
On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle roulant extérieurement, sans glisser, sur un autre cercle.



n°var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
λ	1,5					1,75				

$\omega = 0{,}1m;\ \delta = 0{,}1\lambda$

Fig. 3.16

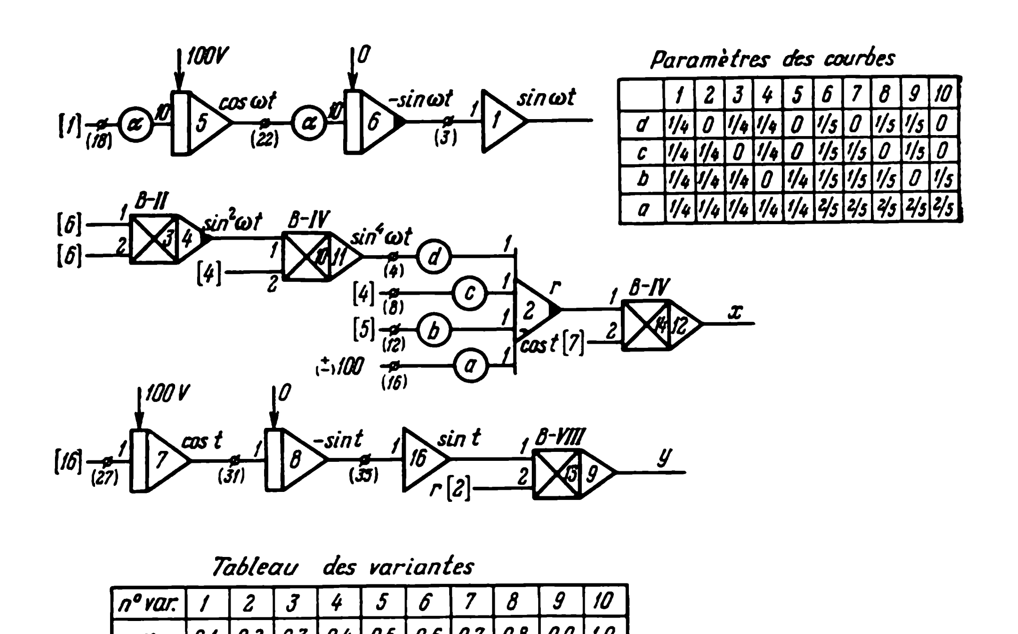


n°var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	4	5	6	7	2	4	5	6	7
λ	1,5					2,0				

$\omega = 0{,}1m;\ \delta = 0{,}1\lambda$

Fig. 3.17

On appelle *hypotrochoïde* allongée la courbe décrite par un point situé en dehors d'un cercle roulant intérieurement, sans glisser, sur un autre cercle.



Paramètres des courbes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	1/4	0	1/4	1/4	0	1/5	0	1/5	1/5	0
c	1/4	1/4	0	1/4	0	1/5	1/5	0	1/5	0
b	1/4	1/4	1/4	0	1/4	1/5	1/5	1/5	0	1/5
a	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5

Tableau des variantes

n° var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Fig. 3.18

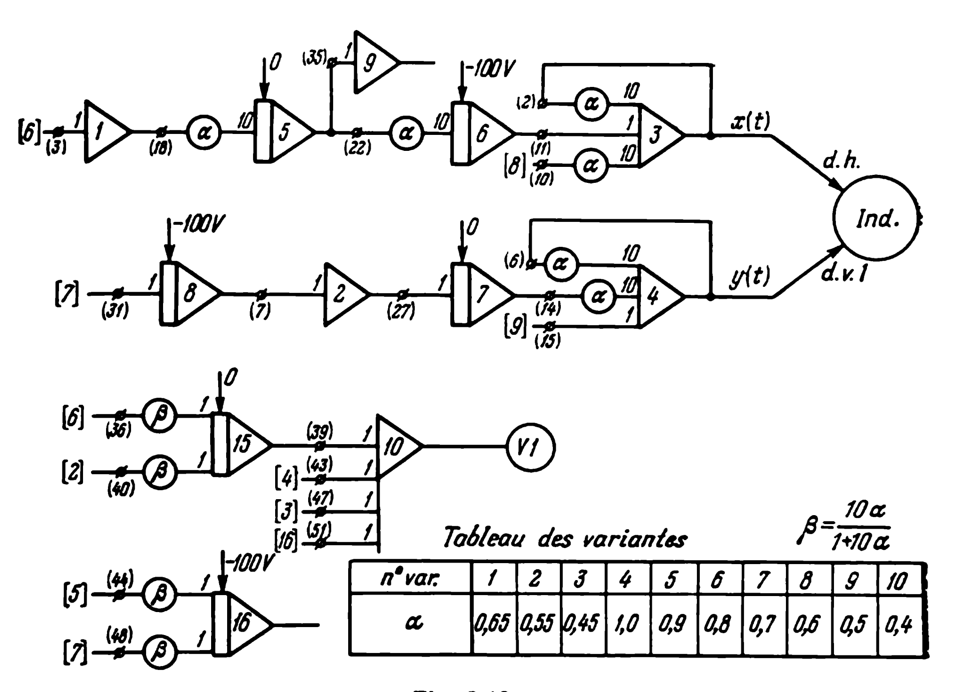


Tableau des variantes

$$\beta = \frac{10\alpha}{1+10\alpha}$$

n° var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,65	0,55	0,45	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4

Fig. 3.19

On appelle *épitrochoïde* allongée la courbe décrite par un point situé en dehors d'un cercle roulant extérieurement, sans glisser, sur un autre cercle.

Dans chacune de ces variantes, les cycloïdes possèdent un nombre fini de branches. Donc, si le schéma est correct et les coefficients de transfert assez exacts, le point décrivant la courbe revient à l'endroit d'où il est parti après avoir effectué un ou plusieurs tours du cercle fixe. Si les coefficients de transfert ne sont pas exacts, les cycloïdes

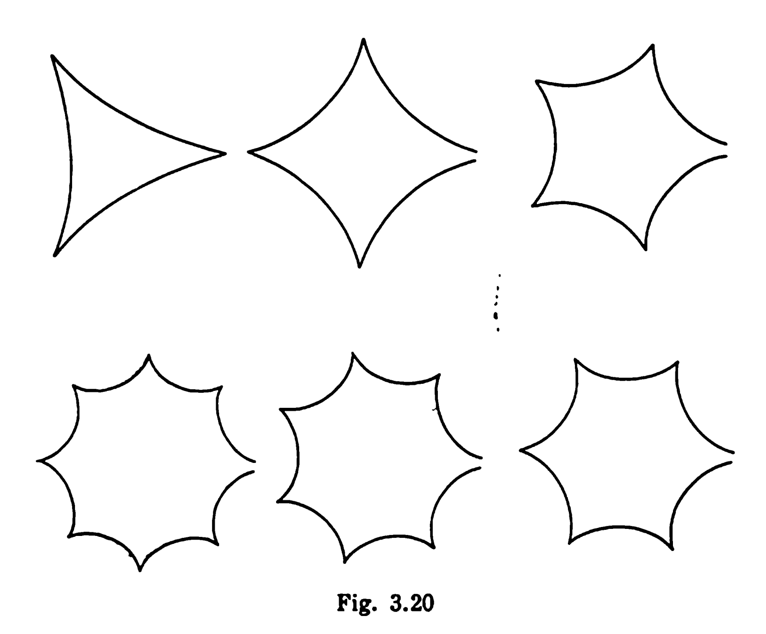


Fig. 3.20

ne reviennent pas à leur point de départ mais à un point situé légèrement à côté, de sorte qu'après chaque tour de cercle elles sont décalées en avant ou en arrière. De tels cas sont représentés sur la figure 3.20.

Le schéma de la figure 3.18 simule des courbes planes appelées courbes de Habenicht, du nom du mathématicien naturaliste allemand qui a cherché des expressions analytiques pour décrire de nombreux modèles géométriques du monde végétal. Le schéma comprend un grand nombre de multiplieurs pour la réalisation du rayon vecteur r et de ses projections sur les axes de coordonnées x et y. Les « fleurs » de Habenicht citées dans le tableau des variantes possèdent un nombre entier de pétales. Donc, le point décrivant la fleur doit revenir à son point de départ si les coefficients de transfert sont correctement mis au point. Certaines courbes de Habenicht sont représentées sur la figure 3.21. Les valeurs numériques des coefficients

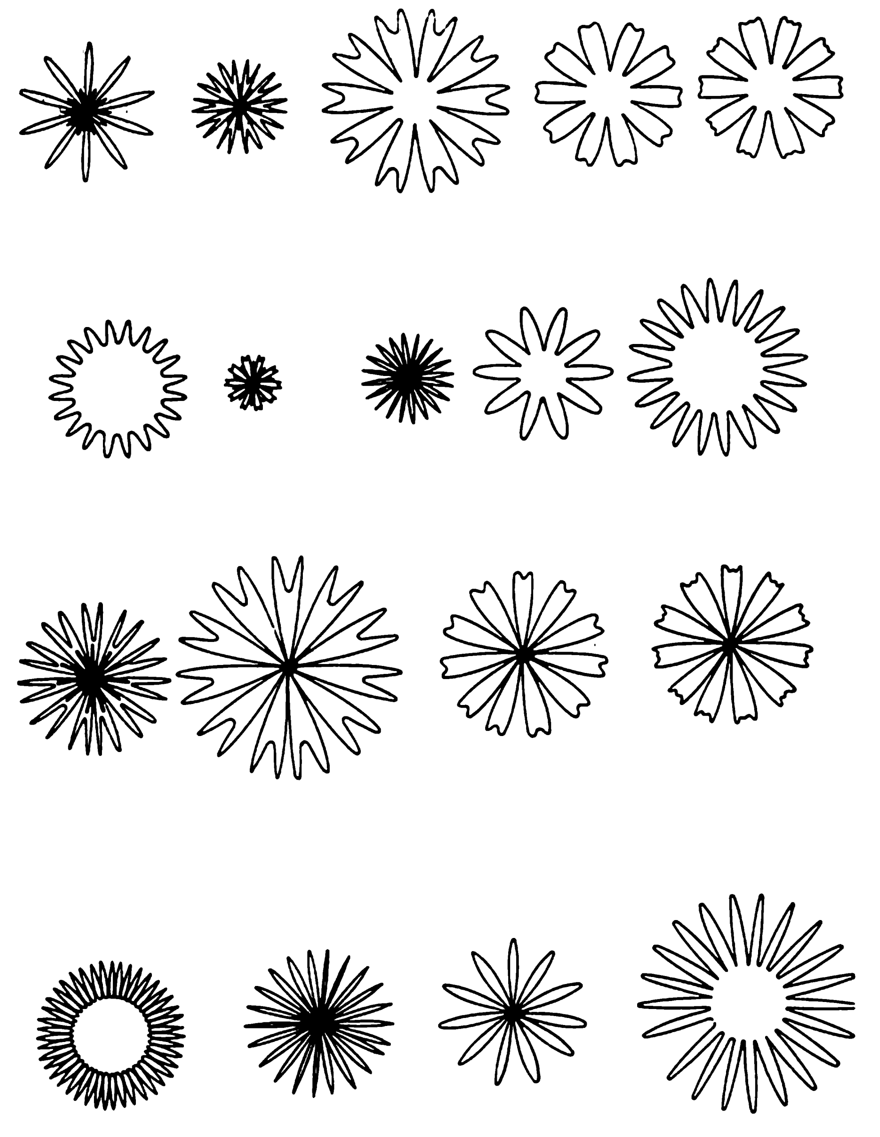


Fig. 3.21

de transfert du sommateur [2] doivent être empruntées au tableau des paramètres des courbes, variantes 1 et 6. Toutes les autres variantes s'obtiennent par élimination et rétablissement de certaines liaisons à l'entrée du sommateur [2] sans remise au point des coefficients de transfert.

Le schéma de la figure 3.19 renferme des opérateurs dont une partie sert au contrôle par la méthode de la variable redondante. Donc, si le schéma est juste et les coefficients de transfert correctement mis au point, le sommateur [10] délivre une variable nulle.

§ 3. Résolution de problèmes de Cauchy

Nous allons étudier la résolution d'un problème de Cauchy *) en simulant le mouvement d'un point matériel lancé obliquement dans un milieu résistant. Dans le chapitre « Divers problèmes de simulation » on trouvera la position et les méthodes de simulation d'autres phénomènes physiques se ramenant à des problèmes de Cauchy.

1. Position du problème. Un point matériel de masse m est lancé d'un point O dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale, avec une vitesse initiale v_0 (fig. 3.22, *a*). Le point se déplace dans un milieu plan opposant une résistance Q proportionnelle à la vitesse du mouvement. On demande de simuler le mouvement du point matériel en supposant que le point O et le point de chute A sont situés à une même hauteur.

2. Mise en équations du problème. Soit un système de coordonnées rectangulaires xOy dont l'axe des x passe par O et A. La loi de Newton donne

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \tag{3.1}$$

où X, Y sont les projections sur les axes de coordonnées de toutes les forces appliquées sur le point matériel, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ les accélérations du point matériel le long des axes de coordonnées.

Le point matériel est soumis à l'action de deux forces: son poids $P = -mg$ et la résistance du milieu $Q = -kmv$, où k est un coefficient de proportionnalité. En portant les expressions des projections des forces P et Q sur les axes de coordonnées

$$X = X_P + X_Q, \quad Y = Y_P + Y_Q,$$

où

$$X_P = 0, \quad X_Q = -km\dot{x}, \quad Y_P = -mg, \quad Y_Q = -km\dot{y}$$

dans (3.1), on obtient le système d'équations différentielles du mouvement

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x}, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos\alpha, & x(0) &= 0, \\ \ddot{y} &= -k\dot{y} - g, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin\alpha, & y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

*) Le chapitre 11 d'*Eléments de simulation sur calculateurs analogiques* contient un grand nombre de problèmes de Cauchy rattachés à la simulation de la cinétique de réactions chimiques.

Pour contrôler la machine, on appliquera la méthode de la variable redondante. Introduisons à cet effet la variable redondante $z(t)$

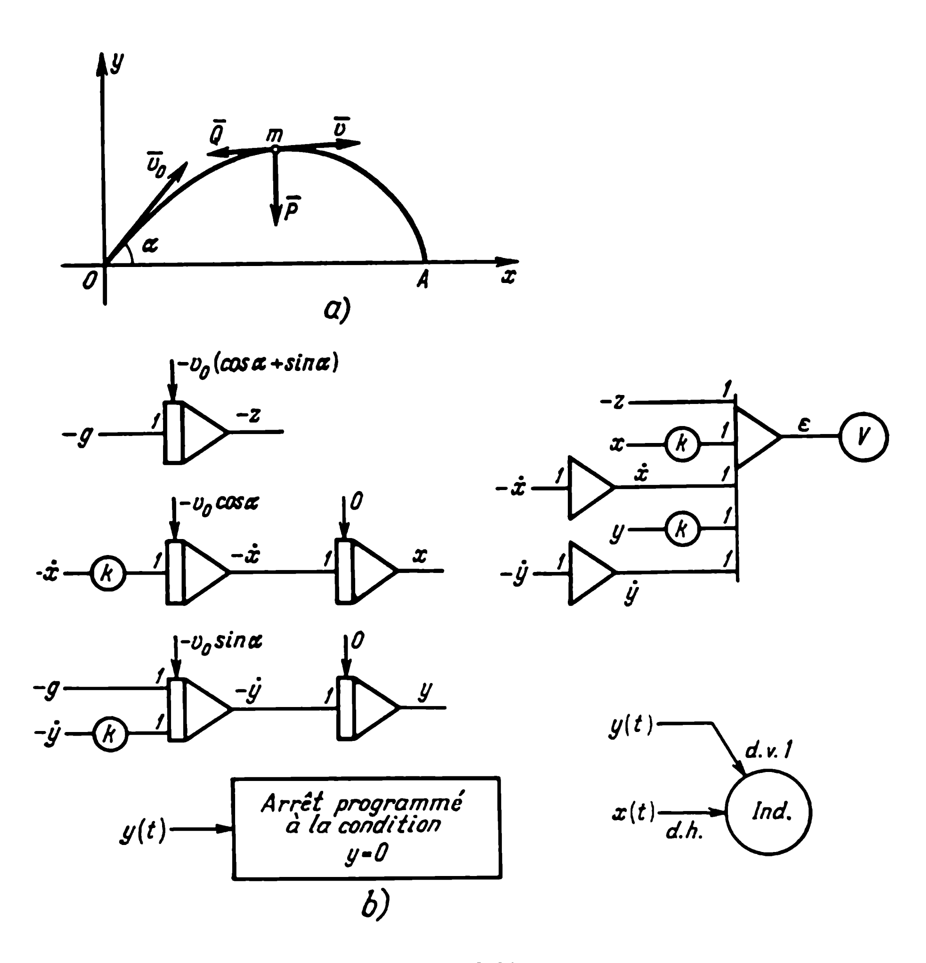


Fig. 3.22

et exigeons qu'elle vérifie la relation de contrôle

$$kx + \dot{x} + ky + \dot{y} - z = 0. \qquad (3.3)$$

Pour réaliser (3.3) il est nécessaire de chercher d'abord une méthode de reproduction de la variable redondante $z(t)$. En dérivant (3.3)

par rapport à t on trouve aisément l'équation différentielle déterminante

$$\dot{z} = k\dot{x} + \ddot{x} + k\dot{y} + \ddot{y}.$$

Compte tenu de (3.2) on obtient finalement les expressions mathématiques indispensables à la simulation du problème:

$$\begin{aligned} &\dot{z} = -g, && z(0) = v_0(\cos\alpha + \sin\alpha); \\ &\ddot{x} = -k\dot{x}, && \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha, \quad x(0) = 0; \\ &\ddot{y} = -k\dot{y} - g, && \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha, \quad y(0) = 0; \end{aligned} \qquad (3.4)$$

$$k\dot{x} + \dot{x} + k\dot{y} + \dot{y} - z = 0.$$

3. **Schéma fonctionnel.** Les schémas fonctionnels sont élaborés pour les variables mathématiques et indiquent le principe de connexion des opérateurs pour câbler les expressions mathématiques données. Le schéma fonctionnel réalisant (3.4) est celui de la figure 3.22, *b*.

Le schéma prévoit un arrêt de la machine à la condition $y = 0$, ce qui traduit le fait que le point de lancement O et le point de chute A sont situés à la même hauteur. Les sorties des intégrateurs délivrant les variables $y(t)$ et $x(t)$ sont reliées aux entrées de déviation verticale et horizontale de l'indicateur électronique. La trajectoire $y = \varphi(x)$ du mouvement est reproduite sur l'écran de l'indicateur. A la sortie du sommateur de contrôle qui élabore l'« erreur » de la relation de contrôle

$$\varepsilon = -(kx + \dot{x} + ky + \dot{y} - z)$$

est branché un voltmètre pour l'observation visuelle de cette « erreur ».

4. **Choix des échelles.** Les échelles sont des coefficients de proportionnalité dimensionnels entre les variables mathématiques et les variables machine. Il y a lieu de faire une distinction entre le choix des échelles des variables dépendantes et de la variable indépendante. On ne modifie l'échelle que des variables mathématiques dépendantes qui figurent « explicitement » dans le schéma fonctionnel. Autrement dit, les variables dont on modifie l'échelle sont élaborées par les opérateurs comprenant un amplificateur opérationnel. Ici il s'agira des variables $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $z(t)$. Il n'est pas nécessaire de choisir les échelles des variables $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ puisqu'elles ne sont délivrées par aucun opérateur contenant un amplificateur opérationnel. On a le tableau de correspondance suivant entre les

variables mathématiques et les tensions électriques .

Variable	Tension
$x(t)$	$u_{x_0} = m_0 x(t)$
$\dot{x}(t)$	$u_{x1} = m_1 \dot{x}(t)$
$y(t)$	$u_{y0} = m_0 y(t)$
$\dot{y}(t)$	$u_{y1} = m_1 \dot{y}(t)$
$z(t)$	$u_z = m_z z(t)$

u_{x0}, u_{x1}, u_{y0}, u_{y1}, u_z sont des tensions électriques, m_0, m_1, m_z les échelles. Pour faciliter la comparaison, les échelles des variables de même dimension ont été prises deux à deux égales.

Les échelles doivent être telles que les variables machine restent dans la plage ± 100 V (pour les calculateurs à lampes). Cette condition sera respectée si l'on calcule l'échelle d'une variable mathématique, par exemple, $z(t)$, avec la formule

$$m_z = \frac{100\text{V}}{|z_{max}|}. \tag{3.5}$$

En effet, il vient alors $|u_z| = m_z |z(t)| \leqslant 100$ V.

Dans notre cas, pour calculer les échelles il faut connaître

$$x_{max}, \quad \dot{x}_{max}, \quad y_{max}, \quad \dot{y}_{max}, \quad z_{max}.$$

Où les prendre puisque la solution analytique de (3.2) est inconnue? Il nous faut donc chercher les valeurs maximales des variables sans recourir à la solution analytique de (3.2). On fait alors appel au principe physique du processus. Au lieu du processus donné, décrit par des équations différentielles « compliquées », on choisit un processus similaire, régi par des équations simples dont la solution analytique permet d'évaluer la plage de variation des variables dans le processus simulé. Ce processus auxiliaire s'appelle *problème d'échelle*. Dans notre cas, comme problème d'échelle on peut considérer le mouvement d'un point matériel lancé obliquement dans le vide. Le vide n'offrant pas de résistance, le point matériel se déplacera plus vite et tombera plus loin. Donc les valeurs maximales des vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ et des déplacements x, y du point dans le vide conviendront pour le choix des échelles des variables décrivant le mouvement d'un point dans un milieu résistant. Au mouvement dans le vide correspond la valeur $k = 0$, donc le système d'équations différentielles (3.2) devient

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos\alpha, & x(0) &= 0; \\ \ddot{y} &= -g, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin\alpha, & y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les équations (3.6) admettent la solution analytique simple

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t, \quad y(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2},$$

d'où il suit que:

1) quel que soit l'angle de lancement α, les projections $\dot{x}$, $\dot{y}$ de la vitesse v sur les axes de coordonnées x et y ne sont pas supérieures à la vitesse v_0;

2) le point de chute le plus éloigné x_{max} correspond à un angle de lancement $\alpha = \pi/4$ et se trouve à une distance de v_0^2/g;

3) la hauteur maximale y_{max} atteinte par le point matériel correspond à un angle de lancement $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et vaut $v_0^2/2g$;

4) la valeur maximale de $z_{max} < 2v_0$.

Le calcul des échelles est conduit dans le tableau 3.8.

Tableau 3.8

Variable	Valeur maximale de la variable	Echelle	Symbole de l'échelle
x, y	$\frac{v_0^2}{g}$	$\frac{100g}{v_0^2}$	m_0
$\dot{x}$, $\dot{y}$	v_0	$\frac{100}{v_0}$	m_1
z	$2v_0$	$\frac{100}{2v_0}$	m_z

5. **Schéma de commutation.** Le schéma de commutation est composé pour les variables machine et orienté vers le calculateur retenu: ici le calculateur MH-7M. La figure 3.23 représente des schémas de commutation. A la différence du schéma fonctionnel de la figure 3.22, ils contiennent des potentiomètres supplémentaires aux entrées des opérateurs [6], [7], [8], [9], [15], qui servent à l'adaptation des échelles.

Le circuit de commande préprogrammée du schéma de commutation de la figure 3.23, *b* interrompt la résolution aussi bien à la condition $y = 0$ qu'à la condition $\dot{y} = 0$, ce qui correspond à l'instant où le point matériel atteint la hauteur maximale y_{max}. L'intégrateur [16] est réservé à la mesure du temps de vol du point matériel.

Signalons encore que dans les schémas de commutation de la figure 3.23, *a* et *b*, les coefficients de transfert des opérateurs et les conditions initiales des intégrateurs sont représentés génériquement sous forme d'expressions mathématiques renfermant les paramètres α, k, v_0 du processus simulé. C'est une circonstance extrêmement importante, car le schéma permet à l'aide d'une commutation de déterminer l'influence exercée sur le processus par les divers para-

mètres soit séparément, soit ensemble par variation des coefficients de transfert des opérateurs et des conditions initiales des intégrateurs.

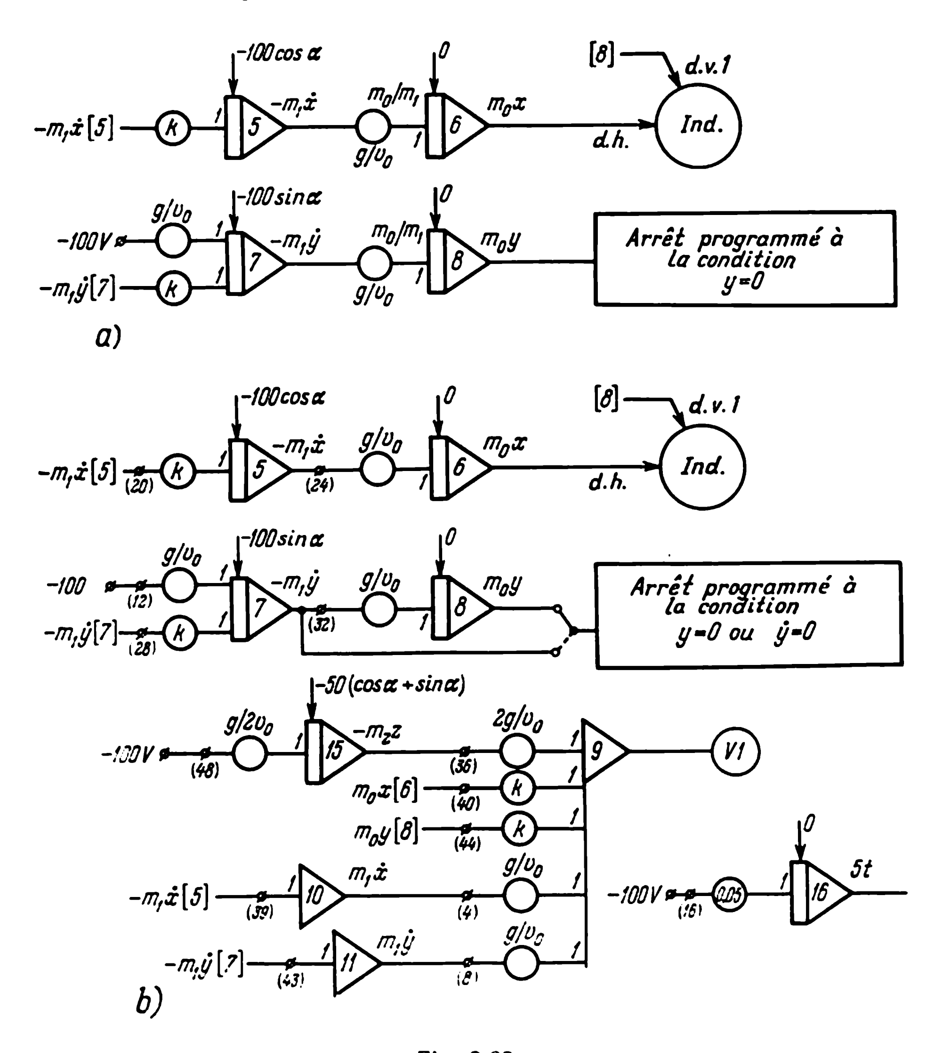


Fig. 3.23

Le schéma de commutation générique s'obtient par le calcul des échelles à l'aide de la méthode des problèmes d'échelle.

Si la plage de variation des paramètres du processus simulé est fixée, il faut concrétiser le schéma de commutation, c'est-à-dire déterminer les numéros des entrées utilisées des opérateurs. La

figure 3.23, *b* représente un tel schéma de commutation. On suppose que $0 \leqslant k \leqslant 1$ s^{-1}, $0 \leqslant 2g/v_0 \leqslant 1$ s^{-1}.

Attardons-nous sur le choix de l'échelle de la variable indépendante qui représente le temps dans les calculateurs analogiques. Ce choix est lié à la durée de la résolution du problème par la machine. L'échelle temporelle est automatiquement adaptée à celle des variables mathématiques dépendantes, de sorte que l'unité de temps est la seconde machine. Un cas important sur le plan terminologique est celui où la variable indépendante du processus simulé est le temps. Ceci étant, si à une seconde de marche du processus réel correspond une seconde machine, on dit que le processus est simulé en *temps réel*. On dit par ailleurs qu'il est simulé en *temps accéléré* ou *ralenti* selon qu'il est réalisé plus ou moins vite qu'en temps réel par la machine. La notion de temps accéléré, ralenti ou réel n'a bien sûr pas de sens pour les phénomènes dans lesquels la variable indépendante n'est pas le temps, mais par exemple la longueur, comme dans les problèmes de flexion d'une poutre. Donc, dans le cas général, ce n'est pas l'échelle du temps qui est essentielle, mais la durée de résolution du problème sur la machine. La durée maximale de résolution d'un problème par la machine MH-7M est limitée par les erreurs d'intégration et est comprise entre 150 et 200 secondes. Il faut compter 10 à 20 secondes pour une observation visuelle convenable. A signaler que la variation de la durée de réalisation du processus simulé ne touche pas les étapes précédentes et obéit à la règle suivante:

pour modifier de m fois la durée de résolution d'un problème il faut modifier de m^{-1} fois les coefficients de transfert de tous les intégrateurs et d'eux seuls *).

Cette règle est une conséquence directe du fait que les variables de sortie et d'entrée de l'intégrateur sont entre elles comme une variable et sa vitesse de variation. Une modification identique et simultanée des coefficients de tous les intégrateurs entraîne une variation de la vitesse de reproduction de toutes les variables machine, et partant de la durée de résolution du problème.

6. Marche à suivre. 1) Dans le tableau 3.9 repérer les valeurs numériques des paramètres du processus simulé de la variante donnée.

2) Simuler le mouvement du point matériel pour les paramètres donnés et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ d'après le schéma de commutation de la figure 3.23, *b*. Si le schéma de commutation est correctement monté et les coefficients de transfert des opérateurs exactement mis au point, l'erreur de la relation de contrôle n'est pas supérieure à $\pm 0,5$ V. Si l'erreur excède cette quantité, il faut la localiser et en éliminer la cause.

---

*) On suppose que le schéma n'utilise pas de dérivateurs.

Déterminer le temps t_n pendant lequel le point est en l'air et les composantes $\dot{x}(t_n)$ et $\dot{y}(t_n)$ de la vitesse de chute. Si $t_n < 10$ s,

Tableau 3.9

Paramètre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{g}{v_0}$ [s^{-1}]	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	0,1
k [s^{-1}]	0,05	0,10	0,15	0,03	0,06	0,09	0,20	0,10	0,06	0,05

modifier la durée de résolution du problème en la portant à 10 s. Relever les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ toutes les secondes et les porter dans le tableau 3.10.

Tableau 3.10

t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(t)$											
$y(t)$											

Construire le graphe $y = \varphi(x)$.

3) Poser $\alpha = \frac{\pi}{4}$, réaliser les trajectoires du point matériel pour k compris entre 0 et 0,4 avec un pas de 0,05. Figer pour chaque trajectoire les valeurs des variables: x_{max} — l'abscisse de la chute, y_{max} — la hauteur maximale, x_m — l'abscisse correspondant à la hauteur maximale, t_m — le temps mis par le point pour atteindre la hauteur maximale, t_n — durée totale du vol. Porter les résultats des mesures dans le tableau 3.11.

Interpréter les résultats obtenus et construire les graphes

$$y_{max} = f_1(x_{max}), \quad t_n = f_2(k).$$

4) Poser $k = 0$, réaliser les trajectoires du point matériel pour divers angles de lancement compris entre $\pi/12$ et $\pi/2$ avec un pas de $\pi/12$. Porter ces résultats dans le tableau 3.12. Interpréter les résultats obtenus. Construire le graphe de $y_{max} = f_3(x_{max})$.

Tableau 3.11

k [s^{-1}]	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
y_{max}									
x_{max}									
t_m									
x_m									
t_n									

Tableau 3.12

α	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\cos\alpha$	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,000
$\sin\alpha$	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1,000
y_{max}						
x_m						
t_m						
x_{max}						
t_n						
$\dot{x}(t_n)$						
$\dot{y}(t_n)$						

7. Généralisation. Chute d'un point matériel sur une surface élastique. Supposons que le point matériel tombe sur une surface élastique schématiquement représentée par des plates-formes impondérables non reliées entre elles, reposant sur des ressorts (fig. 3.24, *a*). En tombant sur une telle plate-forme, le point est soumis à l'action répulsive de la force élastique $F = -mcy$. Le point rebondit et

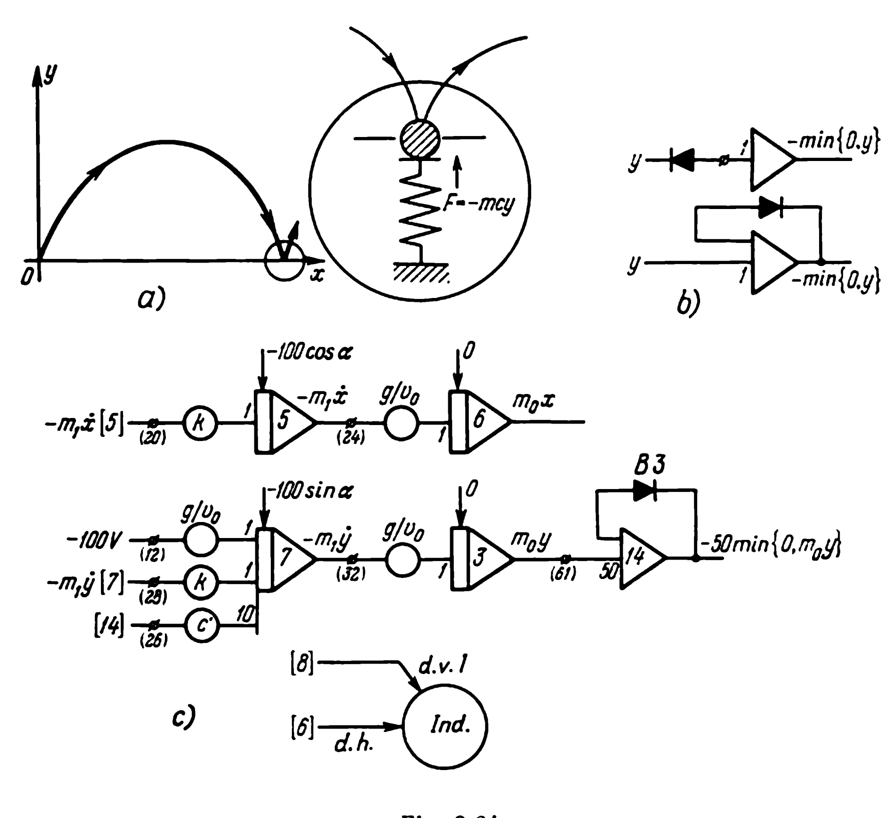


Fig. 3.24

poursuit son mouvement. On demande de simuler ce phénomène. Précisons tout d'abord le système d'équations différentielles (3.2). La force F agit vers le haut et uniquement lorsque le point se trouve au-dessous de l'horizon, i.e. lorsque $y < 0$, de sorte que

$$F = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad y \geqslant 0, \\ -mcy & \text{pour} \quad y < 0, \end{cases}$$

où m est la masse du point, c la rigidité du ressort. Le système d'équations différentielles (3.2) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x}, & x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos\alpha, \\ \ddot{y} &= -k\dot{y} - g + F/m, & y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le terme F/m est facilement câblé sur la machine avec une opération de choix. En effet, $F/m = -c \min \{0, y\}$; les deux variantes de schémas fonctionnels sont représentées sur la figure 3.24, *b*. Le schéma de commutation est représenté sur la figure 3.24, *c*. La rigidité de la surface élastique vaut $c = 500\, c'$, où c' est le coefficient de transfert à la (26)-ième entrée de l'intégrateur [7].

Simuler le mouvement du point pour $\alpha = \pi/3$, $k = 0{,}1$ et $0{,}10$. Interpréter les résultats obtenus et tracer les graphes $y = \varphi(x)$, $\dot{y} = \psi_1(x)$, $F = \psi_2(x)$.

§ 4. Réduction d'un problème aux limites à un problème de Cauchy

Les problèmes aux limites sont envisagés pour des équations différentielles d'ordre supérieur au premier. Comme exemple de problème aux limites citons le problème

$$y''(t) = \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1$$

dont la solution est cherchée sur l'intervalle $t \in [0, 1]$, où $\varphi(t)$ est une fonction donnée. Il est impossible d'obtenir immédiatement la solution de ce problème. Force est donc de lui trouver un problème de Cauchy équivalent, soit

$$y''(t) = \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$

et de le simuler.

D'une façon générale, un problème de Cauchy et un problème aux limites sont équivalents si leurs solutions sont confondues sur l'intervalle d'intégration. La recherche d'un problème de Cauchy équivalent à un problème aux limites donné s'appelle *réduction du problème aux limites au problème de Cauchy*. Nous allons considérer une méthode simple de réduction, appelée méthode des essais et corrections, sur l'exemple de la simulation du tir à l'obus sur une cible immobile. Dans le chapitre 6 des « Eléments de simulation sur calculateurs analogiques » on trouvera des problèmes aux limites rattachés à la simulation d'une flexion élastique et les méthodes de leur réduction à un problème de Cauchy.

Tir sur une cible à terre.

1. Position du problème. Un canon placé en un point O d'une région défendue (RD) tire à l'instant $t = 0$ sur les positions ennemies PE (fig. 3.25) se trouvant à une distance l de O. A sa sortie du fût, l'obus est animé d'une vitesse v_0. On admet que l'air oppose

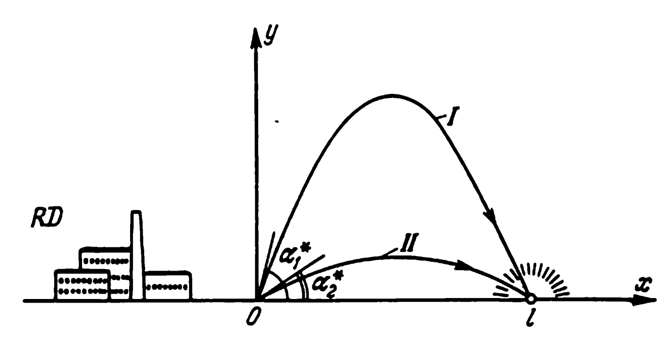


Fig. 3.25

une résistance proportionnelle à la vitesse de l'obus *). Simuler la trajectoire d'un obus qui atteint la cible.

2. Equations différentielles du mouvement. Le mouvement de l'obus est régi par le système d'équations différentielles déjà connu (3.4), à la seule différence qu'au lieu du problème de Cauchy on a affaire au problème aux limites

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x}, \quad x(0)=0, \quad x(t^*)=l, \\ \ddot{y} &= k\dot{y}-g, \quad y(0)=0, \quad y(t^*)=0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où t^* est le temps de vol de l'obus, i.e. le temps compris entre la mise à feu et la destruction de la cible.

Réduire le problème à un problème de Cauchy consiste dans le cas de l'équation (3.8) à résoudre le problème de rencontre de l'obus avec la cible. En d'autres termes il faut trouver un angle d'élévation α^* du canon tel qu'au bout d'un temps t^* après la mise à feu l'on ait

$$x(t^*) = l, \quad y(t^*) = 0.$$

3. Schéma fonctionnel et schéma de commutation. Ces schémas sont à peu de chose près ceux des figures 3.22 et 3.23. Nous les omettrons.

---

*) Nous avons adopté une dépendance linéaire de la résistance par rappor à la vitesse du mouvement exceptionnellement pour simplifier le problème. En réalité cette dépendance est plus complexe.

4. Marche à suivre.

1) Dans le tableau 3.13 repérer la variante donnée, calculer les coefficients de transfert du schéma de commutation et simuler la

Tableau 3.13

Paramètre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{q}{v_0}$ [s⁻¹]	0,014	0,014	0,020	0,020	0,015	0,015	0,021	0,016	0,018	0,016
k [s⁻¹]	0,004	0,006	0,007	0,010	0,005	0,007	0,007	0,004	0,008	0,007

rencontre de l'obus avec la cible en admettant que celle-ci se trouve à une distance $l = 0{,}4\ v_0^2/g$ de la pièce d'artillerie.

2) Simuler la trajectoire de l'obus pour un angle d'élévation de $\alpha = \frac{\pi}{4}$; évaluer le temps de vol de l'obus; porter la durée de simulation des trajectoires jusqu'à 20 secondes machine.

3) Réduire le problème aux limites (3.8) au problème de Cauchy (3.4). A signaler que dans la plupart des cas il existe deux angles d'élévation, α_1^* et α_2^* qui permettent à l'obus de faire mouche.

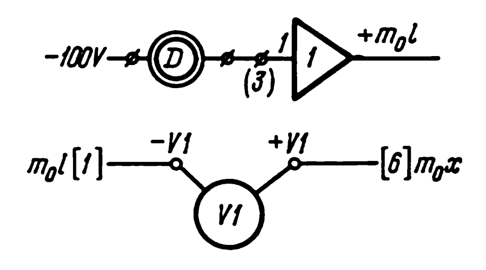


Fig. 3.26

La non-unicité du problème de Cauchy équivalent est une particularité importante du phénomène étudié. A chaque angle d'élévation correspond une trajectoire de l'obus. La trajectoire du premier type est représentée sur la figure 3.25 par le chiffre romain I. Cette trajectoire est dite courbe. Le chiffre romain II représente la trajectoire du second type, dite trajectoire rasante. A remarquer que lorsqu'on tire dans le vide les angles α_1^* et α_2^* vérifient la relation $\alpha_1^* + \alpha_2^* = \pi/2$.

La réduction s'opère par la méthode des essais et corrections. On se donne plusieurs valeurs arbitraires de l'angle α, soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \tag{3.9}$$

et l'on simule la trajectoire correspondant à chacune d'elles avec le schéma de la figure 3.23. Ce schéma comporte en plus l'inverseur [1] (pour la donnée de la coordonnée $x = l$ au point de concentration des forces ennemies) et le voltmètre V1 est branché autrement. La figure 3.26 représente la partie du schéma de commutation notifiant ces modifications. Au cours des essais de simulation

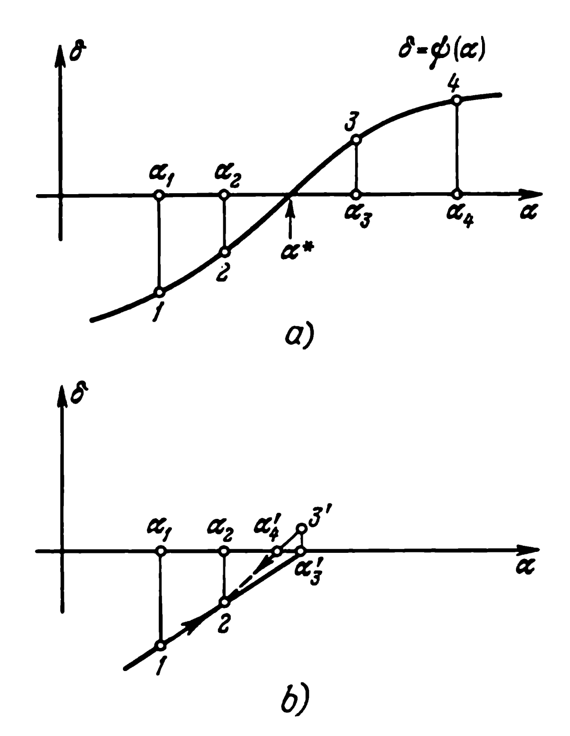


Fig. 3.27

des trajectoires, le voltmètre V1 mis au mode COMPENSATION est utilisé pour mesurer l'erreur $\delta = m_0 (x - l)$ entre l et l'abscisse du point de chute de l'obus. Le signe de l'erreur indique si le tir est court ou long. Aux valeurs α_j correspondent les erreurs

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j, \ldots \tag{3.10}$$

On construit le graphe de $\delta = \psi(\alpha)$ (fig. 3.27, *a*) en se servant de (3.9) et (3.10). Le zéro de la fonction $\psi(\alpha)$ correspond à la valeur cherchée α^*. Pour réduire le nombre d'essais on peut utiliser la

méthode suivante. Les deux premières valeurs, α_1 et α_2, sont arbitraires, quant à α_3', elle est choisie en fonction des deux précédentes (fig. 3.27, *b*). Les points *1* et *2* sont reliés par une droite jusqu'à son intersection avec l'axe des α. Déterminer de cette façon la valeur

Table trigonométrique

Degrés	sin	cos	Degrés	Degrés	sin	cos	Degrés
0	0,0000	1,0000	90	23	0,3907	0,9205	67
1	0,0175	0,9998	89	24	0,4067	0,9135	66
2	0,0349	0,9994	88	25	0,4226	0,9063	65
3	0,0523	0,9986	87				
4	0,0698	0,9976	86	26	0,4384	0,8988	64
5	0,0872	0,9962	85	27	0,4540	0,8910	63
				28	0,4695	0,8829	62
6	0,1045	0,9945	84	29	0,4848	0,8746	61
7	0,1219	0,9925	83	30	0,5000	0,8660	60
8	0,1392	0,9903	82				
9	0,1564	0,9877	81	31	0,5150	0,8572	59
10	0,1736	0,9848	80	32	0,5299	0,8480	58
				33	0,5446	0,8387	57
11	0,1908	0,9816	79	34	0,5592	0,8290	56
12	0,2079	0,9781	78	35	0,5736	0,8192	55
13	0,2250	0,9744	77				
14	0,2419	0,9703	76	36	0,5878	0,8090	54
15	0,2588	0,9659	75	37	0,6018	0,7986	53
				38	0,6157	0,7880	52
16	0,2756	0,9613	74	39	0,6293	0,7771	51
17	0,2924	0,9563	73	40	0,6428	0,7660	50
18	0,3090	0,9511	72				
19	0,3256	0,9455	71	41	0,6561	0,7547	49
20	0,3420	0,9397	70	42	0,6691	0,7431	48
				43	0,6820	0,7314	47
21	0,3584	0,9336	69	44	0,6947	0,7193	46
22	0,3746	0,9272	68	45	0,7071	0,7071	45

suivante α_3' de l'angle d'élévation puis simuler la trajectoire correspondante; calculer l'erreur δ_3' à l'aide de V1 et représenter le point *3'* correspondant. Mener par les points *2* et *3'* une droite jusqu'à son intersection avec l'axe des α et trouver la valeur suivante α_4', et ainsi de suite.

Pour réduire le problème on se servira de la table des fonctions trigonométriques sinus et cosinus donnée plus haut. Faire la réduction pour un tir courbe et un tir tendu.

4) S'assurer que l'obus a atteint la cible et vérifier le fonctionnement de la machine à l'aide d'un schéma de contrôle. Pour les deux types de trajectoires, définir le temps t_1^* et t_2^* de vol de l'obus; la vitesse v_1^* et v_2^* de l'obus au moment où il atteint la cible; l'altitude maximale $y_{1\,max}$ et $y_{2\,max}$ de l'obus. Interpréter les résultats obtenus.

§ 5. Simulation de l'équation de la chaleur

1. Position du problème. Une paroi homogène, épaisse, de grande surface sépare deux milieux de température différente (fig. 3.28), la température du milieu de gauche varie comme $\varphi_1(t)$, celle du milieu de droite comme $\varphi_2(t)$. L'épaisseur de la paroi est l. On demande de simuler la distribution de la température pour les points intérieurs de la paroi en considérant les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ données.

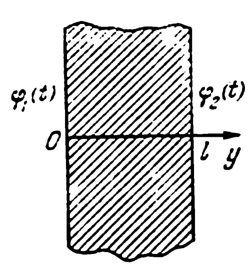


Fig. 3.28

Introduisons tout d'abord des variables mathématiques qui décrivent la distribution de la température en profondeur de la paroi. Traçons un axe Oy perpendiculaire à la paroi. La température des points intérieurs est une fonction de deux variables: le temps t et la coordonnée y, i.e. $v(t, y)$. Les points de la paroi situés sur une même verticale possèdent une même température (isothermes) par suite de la grande surface de la paroi et de son homogénéité.

La fonction $v(t, y)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{3.11}$$

où λ est le coefficient de conductibilité thermique, c la chaleur spécifique volumique de la paroi. La solution de l'équation (3.11) doit vérifier les conditions aux limites $v(t, 0) = \varphi_1(t)$, $v(t, l) = \varphi_2(t)$ et la condition initiale $v(0, y) = T(y)$.

2. Approximation de l'équation de la chaleur. Pour chercher un système d'équations différentielles ordinaires approchant l'équation (3.11), partageons la paroi par des lignes verticales en une série de couches de même épaisseur. A l'intersection des verticales avec l'axe des y, on obtient une série de points en lesquels la température sera uniquement fonction du temps. On supposera que les points de l'axe Oy sont situés à la même petite distance h l'un de l'autre (fig. 3.29). Portons la coordonnée u_j du point j dans l'équation (3.11):

$$\frac{\partial v(t, y_j)}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v(t, y_j)}{\partial y^2}. \tag{3.12}$$

Si l'on désigne $v(t, y_j)$ par $v_j(t)$, on obtient $\frac{dv(t, y_j)}{\partial t} = \frac{dv_j(t)}{dt}$. La dérivée partielle $\frac{\partial^2 v(t, y_j)}{\partial y^2}$ peut approximativement être exprimée en fonction des valeurs de $v(t, y)$ au point y_j et aux points voisins y_{j+1} et y_{j-1}:

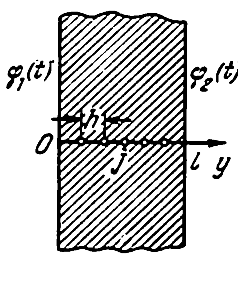


Fig. 3.29

$$\frac{\partial^2 v(t, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$

où

$$v_{j+1}(t) = v(t, y_{j+1}), \quad v_{j-1}(t) = v(t, y_{j-1}).$$

Compte tenu de ces expressions, l'équation (3.12) se transforme en l'équation différentielle ordinaire du premier ordre:

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu [v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$
$$v_j(0) = T(y_j) = T_j, \quad \mu = \frac{\lambda}{ch^2}.$$

On obtiendra autant de telles équations qu'il n'existe de points sur l'axe. Si les points sont au nombre de n, les équations formeront un système de n équations différentielles ordinaires qui approchera l'équation (3.12):

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu [v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$v_j(0) = T_j, \qquad v_0(t) = \varphi_1(t), \qquad v_{n+1}(t) = \varphi_2(t). \tag{3.13}$$

Le système (3.13) est un problème de Cauchy.

Fig. 3.30

3. Schéma fonctionnel. Le schéma fonctionnel résolvant le système (3.13) est représenté sur la figure 3.30. Ce schéma est économique. Il nécessite un intégrateur en tout pour la résolution de chaque équation. Les rectangles indiquent les schémas générant les fonctions données $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$.

4. Adaptation des échelles des variables. En adaptant les échelles des variables on tiendra compte de ce que la température des points intérieurs ne peut dépasser les quantités $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$.

5. Marche à suivre*). Repérer la variante donnée sur le tableau 3.14 et composer les schémas fonctionnel et de commutation pour

*) Au chapitre 4 on trouvera divers cas de simulation de l'équation différentielle de la chaleur.

la machine MH-7M ($l = 1$; toutes les données sont adaptées dans le tableau).

Tableau 3.14

Variante	$T(y)$	$\varphi_1(\bar{v})$	$\varphi_2(t)$	λ/c
1	$\sin \pi y$	1	$\exp(-t)$	0,1
2	$1-\sin \pi y$	0	$1-\exp(-t)$	0,1
3	$1-y$	-1	$+1$	0,1
4	y	$\exp(-t)$	0	0,1
5	1	$1-\exp(-t)$	1	0,1
6	0	1	$\exp(-t)$	0,2
7	y^2	0	$1-\exp(-t)$	0,2
8	$1-y^2$	-1	0	0,2
9	$\cos \pi y$	$\exp(-t)$	1	0,2
10	$1-\cos \pi y$	$1-\exp(-t)$	1	0,2

Organiser le contrôle de la machine par la méthode de la variable redondante en utilisant la relation

$$z(t)+\sum_{j=1}^{n} v_j(t)=0, \tag{3.14}$$

où $z(t)$ est la variable redondante dont l'équation différentielle déterminante simple

$$z'(t)=-[v_0(t)-v_1(t)+v_{n+1}(t)-v_n(t)], \quad z(0)=-\sum_{j=1}^{n} v_j(0),$$

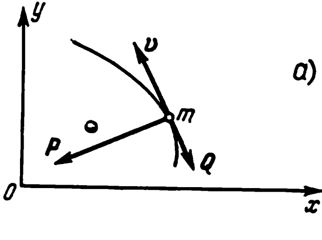
se déduit de la relation de contrôle (3.14) par une dérivation et une substitution des dérivées $v'_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) du système (3.13).

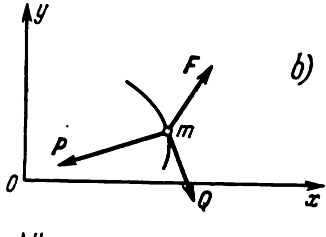
CHAPITRE 4

DIVERS PROBLÈMES DE SIMULATION

§ 1. Mouvement d'un point matériel sous l'action d'un centre attractif

1. Description du phénomène. Un point matériel de masse m se déplace dans un milieu résistant sous l'action d'un centre attractif fixe O. Le point finira par tomber sur le point attractif, puisque son énergie diminue en raison de la résistance du milieu. La figure 4.1, a représente le point matériel et les forces agissant sur lui : $\boldsymbol{P} = -\omega^2 m \boldsymbol{r}$, force d'attraction du point vers le centre O, et $\boldsymbol{Q} = -km\boldsymbol{v}$, résistance du milieu. Outre ce cas, le schéma que nous donnons plus bas permet d'étudier le mouvement lorsque le point est soumis à l'action des forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ et d'une force $\boldsymbol{F}$ (fig. 4.1, b) et lorsque le point est équipé en plus d'un moteur dont la traction $\boldsymbol{S} = k_1 m\boldsymbol{v}$ agit dans le sens de la vitesse et lui est proportionnelle (fig. 4.1, c).





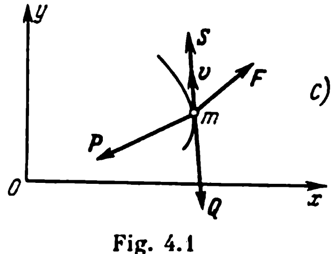


Fig. 4.1

2. Equations différentielles du mouvement. En projetant toutes les forces agissant sur le point matériel sur les axes de coordonnées on obtient les systèmes d'équations différentielles suivants:

pour la figure 4.1, a :
$$\ddot{x} = -\omega^2 x - k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y - k\dot{y}, \tag{4.1}$$

pour la figure 4.1, b :
$$\ddot{x} = -\omega^2 x - k\dot{x} + F_x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y - k\dot{y} + F_y, \tag{4.2}$$

pour la figure 4.1, c :
$$\ddot{x} = -\omega^2 x + (k_1 - k)\dot{x} + F_x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y + (k_1 - k)\dot{y} + F_y \tag{4.3}$$

avec les conditions initiales communes

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad y(0) = 0,$$

conditions qui supposent que le point matériel se trouve en x_0 de l'axe Ox à l'instant initial, ne possède pas de composante de la vitesse le long de l'axe Ox et que sa vitesse initiale le long de l'axe Oy est égale à $\dot{y}_0$.

3. Schéma de commutation. Le schéma est représenté sur la figure 4.2. Il est composé pour les valeurs numériques suivantes des paramètres: $k = 0{,}1$; $k_1 = 2k$; $\omega = 1$. Les projections $F_x = F_y$ de la force F qui agit le long de la bissectrice du premier quadrant

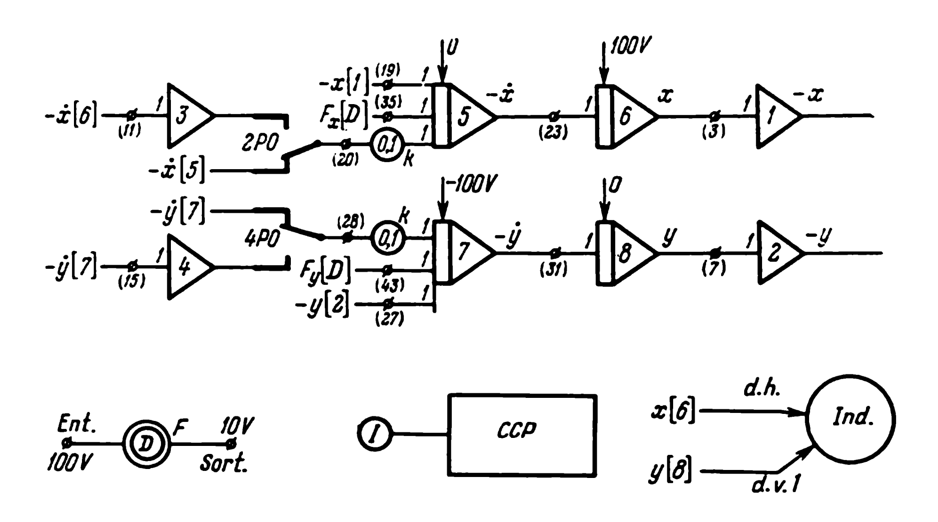


Fig. 4.2

sont assimilées à une tension électrique de 10 volts. Si la variable de sortie F du diviseur D est appliquée aux entrées (35) et (43) des intégrateurs [5] et [7] et si les contacts 2PO et 4PO occupent la position indiquée par le schéma, on obtient la solution du système (4.2). Si l'on change le signe de la tension appliquée à l'entrée du circuit de commande préprogrammée, les contacts 2PO et 4PO occupent la position inverse et la machine simulera le système d'équations (4.3). Les coefficients de transfert aux entrées (20) et (28) peuvent varier entre 0 et 1,1. La force constante F peut être modifiée à l'aide du diviseur de tension D.

4. Résultats de la simulation. Supposons qu'on ait opéré une déconnexion aux entrées (35), (20), (28), (43); la machine résoudra

alors le système (4.1) pour $k = 0$. La trajectoire du point matériel est une ellipse.

Si l'on rétablit les connexions aux entrées (20) et (28) et que l'on fasse varier progressivement la quantité k, on obtient sur l'écran une série de spirales à point asymptotique en l'origine des coordonnées, où se trouve le centre attractif. A partir d'une certaine valeur de k dépendant de ω, le point, sans avoir effectué un tour autour du centre attractif, commence à tendre asymptotiquement vers lui.

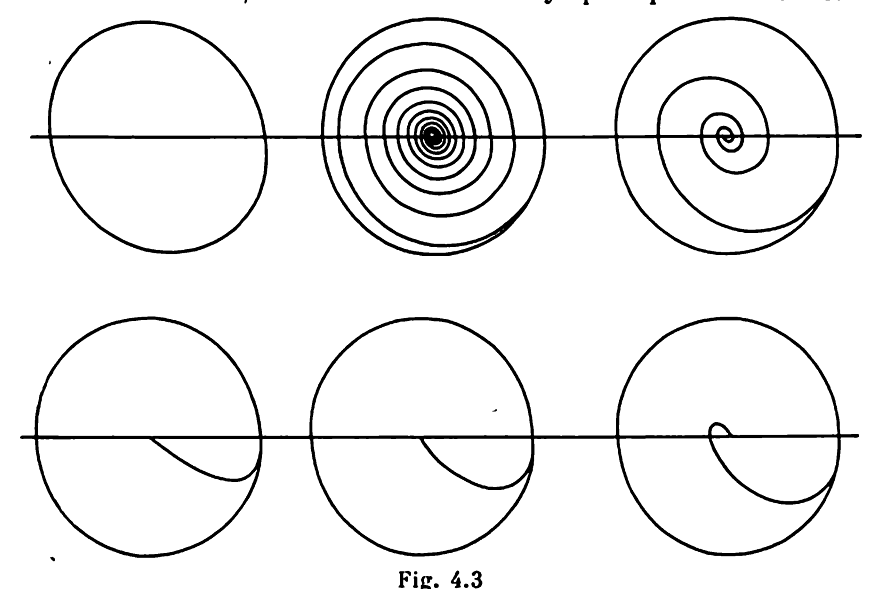


Fig. 4.3

Un tel mouvement est dit apériodique. Les trajectoires sont représentées sur la figure 4.3. Si, ayant retenu une valeur de k (par exemple 0,1), on met la machine en marche et l'on attend que la trajectoire se rapproche du centre attractif, et qu'on modifie ensuite le signe à l'entrée du circuit de commande préprogrammée, on constate que la trajectoire, de spirale enroulante se transforme en spirale déroulante. ce qui traduit l'intervention de la force de traction $\boldsymbol{S}$.

L'établissement des connexions aux entrées (35) et (43) ne modifie en principe pas la nature du mouvement du point, mais déplace simplement la trajectoire en direction de la bissectrice du premier quadrant d'une distance qui dépend de la grandeur de la force $\boldsymbol{F}$.

§ 2. Pendule double

1. Description des oscillations. Imaginons deux pendules approximativement de même période d'oscillations, l'un lourd, par exemple un lustre, l'autre léger. Le pendule léger est suspendu au lourd

comme l'indique la figure 4.4. Si l'on écarte légèrement le pendule lourd et qu'on le relâche, il arrête brusquement d'osciller. Le pendule léger commence alors un mouvement rapide qui cesse au bout d'un certain temps; à ce moment le pendule lourd commence à osciller. De telles oscillations alternatives de deux systèmes, accompagnées d'un échange d'énergie s'appellent *battements*.

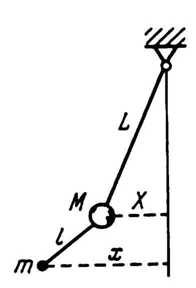


Fig. 4.4

Simulons ces battements.

2. Equations différentielles du mouvement. Les oscillations du pendule double sont étudiées en physique et en mécanique. Nous ne nous arrêterons pas sur la description mathématique du phénomène et nous donnerons les équations différentielles dans le cas de faibles oscillations. Ce processus est régi par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\omega^2(1+2\mu)X+\mu\omega^2 x, & \dot{X}(0)&=0, \quad X(0)=X_0, \\ \ddot{x} &= -\omega^2 x+\omega^2 X, & \dot{x}(0)&=x(0)=0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où X et x sont les écarts des pendules lourd et léger par rapport à la position d'équilibre, $\mu = \frac{m}{M}$ un petit nombre, m et M les masses des pendules léger et lourd, $\omega^2 = g/l$, g l'accélération de la pesanteur, l la longueur du pendule léger. On suppose que $L = l$.

3. Schéma simulant le système (4.4). Il est représenté sur la figure 4.5. Il correspond au cas $\omega = 1$, $\mu = 0{,}01$. Le processus est simulé en temps accéléré. A l'écart initial $X(0) = X_0$ du pendule lourd correspond une tension électrique de 10 volts (cf. conditions initiales de l'intégrateur [6]). Pour faciliter l'observation visuelle des oscillations, au lieu de la variable $x(t)$ on applique la variable $\tilde{X}(t) = -25 + 0{,}1x(t)$ à l'entrée d.v.1 de l'indicateur. Ceci permet de décaler verticalement les oscillogrammes $X(t)$ et $x(t)$.

4. Résultats de la simulation du système (4.4). Ils sont représentés sur la figure 4.6. En haut on a les oscillogrammes des variables $X(t)$ et $x(t)$ qui montrent que la valeur maximale de l'amplitude d'oscillations d'un pendule correspond à la valeur zéro de l'amplitude de l'autre pendule. En bas on a le graphe de la solution $x = \psi(X)$ du système (4.4). Il est aisé de voir que c'est une courbe de Lissajous qui couvre un domaine contenu dans un parallélogramme.

§ 3. Pendules liés

1. Descriptions des oscillations. La figure 4.7 représente un système oscillant composé de deux pendules, dits *liés* ou *sympathiques*, reliés entre eux par une liaison mécanique élastique figurée par le ressort. Sans cette liaison les pendules oscilleraient indépendamment l'un

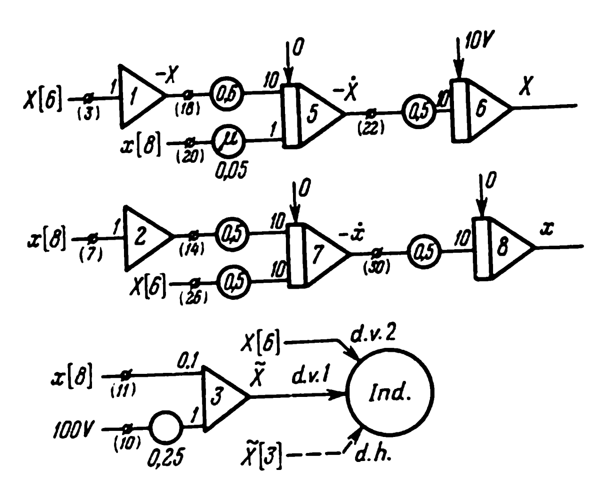
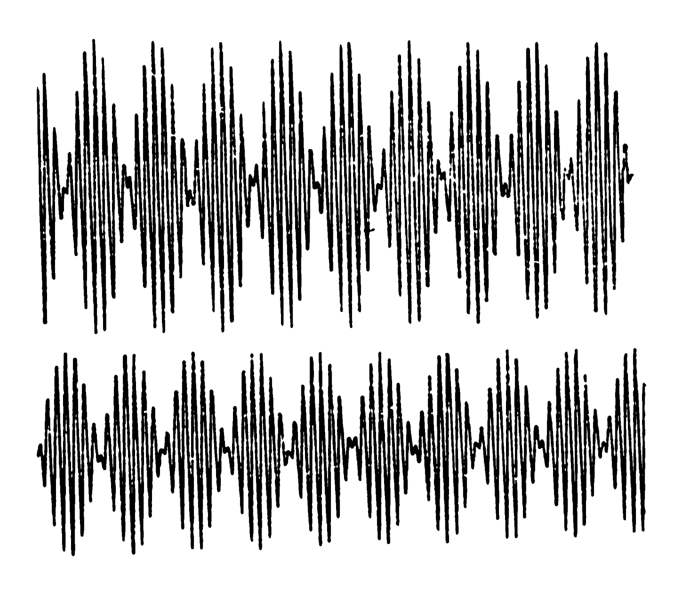

X[6]
(3)
1
-X
(18)
0,5
10
0
-Ẋ
5
x[8]
(20)
μ
0,05
1
(22)
0,5
10
10V
6
X
x[8]
(7)
1
2
(14)
0,5
10
0
-ẋ
7
X[6]
(26)
0,5
10
(30)
0,5
10
0
8
x
X[6]
d.v.2
x[8]
(11)
0,1
X̃
d.v.1
3
Ind.
100V
(10)
0,25
1
X̃[3]
d.h.

Fig. 4.5



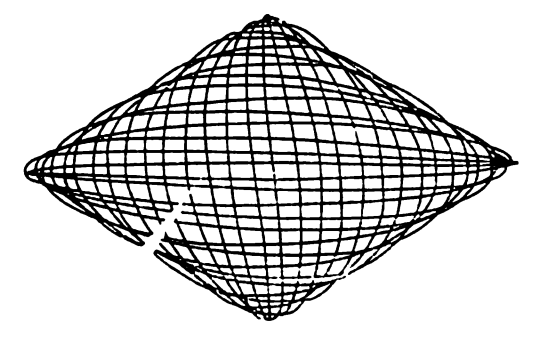


Fig. 4.6

de l'autre. La liaison entraîne généralement un « transfert » d'énergie d'un pendule à l'autre, donc une modification de la forme des oscillations de chacun d'eux. On se propose de simuler ces oscillations.

2. Equations différentielles. Les équations différentielles des faibles oscillations *) de pendules liés s'écrivent

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 - k_1 (x_1 - x_2) - 2\alpha \dot{x}_1, \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1), \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Fig. 4.7

où x_1 et x_2 sont les écarts des pendules par rapport à la position d'équilibre, ω_1 et ω_2 les fréquences déterminées par les paramètres des pendules, k_1 et k_2 des coefficients dépendant de la rigidité de la liaison entre les pendules; on suppose que $k_1 \neq k_2$, α un coefficient qui tient compte du frottement visqueux opposé aux oscillations du premier pendule.

3. Schéma de commutation. Le schéma simulant le système (4.5) est représenté sur la figure 4.8. Les valeurs numériques des

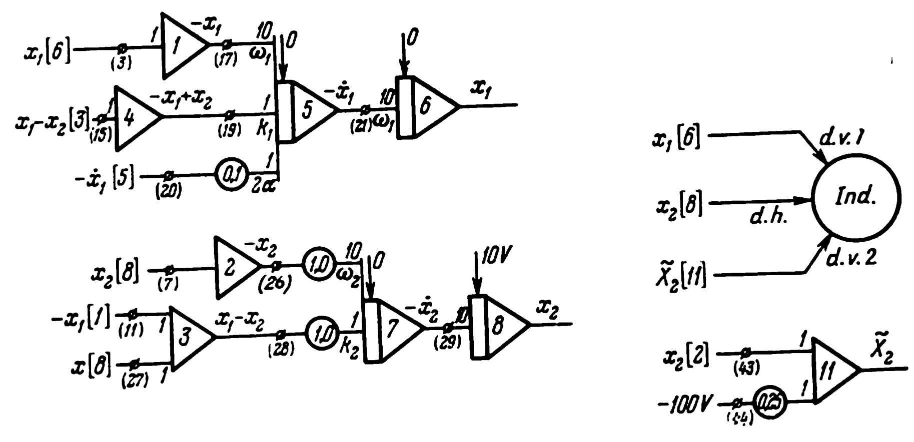


Fig. 4.8

coefficients de transfert des opérateurs correspondent au cas de résonance où $\omega_1 = \omega_2 = 10$, $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha = 0{,}1$. On visualise la variable $\tilde{X}_2 = 25 + x_2$ au lieu de la variable $x_2(t)$, ceci dans le but de décaler verticalement les oscillogrammes des oscillations $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

4. Résultats de la simulation. Dans le cas de la figure 4.8, où

*) Pour la déduction de ces équations, on pourra consulter un ouvrage de mécanique théorique.

$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 10$ V les oscillations à $\alpha = 0$ (il faut rompre la liaison à l'entrée (20) de l'intégrateur [5]) sont des battements, les mêmes que pour le pendule double (cf. fig. 4.6). Si l'on rétablit la connexion à l'entrée (20) les oscillations seront amorties.

Le comportement des pendules liés dépend essentiellement de leurs positions initiales. Si $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ et $x_1(0) = x_2(0) \neq 0$ ou $x_1(0) = -x_2(0) \neq 0$, chaque pendule oscillera indépendamment de l'autre, i.e. il n'y aura pas d'échange d'énergie entre eux. Ces oscillations sont dites normales.

Le schéma de la figure 4.8 permet d'étudier le comportement des pendules dans le cas d'un « désaccord » où ω_1 et k_1 sont légèrement différents de ω_2 et k_2. Ces dernières quantités peuvent être modifiées à l'aide des potentiomètres placés aux entrées (26) et (28) de l'intégrateur [7].

§ 4. Oscillateur spatial

1. Position du problème. Un oscillateur spatial anisotrope chargé est placé dans un champ magnétique homogène $\boldsymbol{H}$; on demande de simuler sa trajectoire.

2. Equations différentielles du mouvement. On supposera que l'oscillateur possède une énergie potentielle $u(x, y, z) = \frac{m}{2}[\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)]$ et que le champ magnétique homogène est parallèle à l'axe des z. Si le potentiel vectoriel du champ est de la forme $\frac{H}{2}(y, -x, 0)$, le lagrangien s'écrira

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2) + \frac{m\omega_H}{2}(y\dot{x} - x\dot{y}),$$

où $\omega_H = \frac{eH}{mc}$, et e est la charge de l'oscillateur. Si l'on connaît le lagrangien on trouve sans peine le système d'équations différentielles cherché

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_x^2 x + \frac{eH}{mc}\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\omega_y^2 y - \frac{eH}{mc}\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2 z. \end{aligned} \tag{4.6}$$

3. Schéma de commutation. Le schéma résolvant le système (4.6) est donné sur la figure 4.9. Les coefficients de transfert du schéma correspondent au cas isotrope où $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$. Les valeurs ω_x et ω_y peuvent varier dans des limites assez larges aux

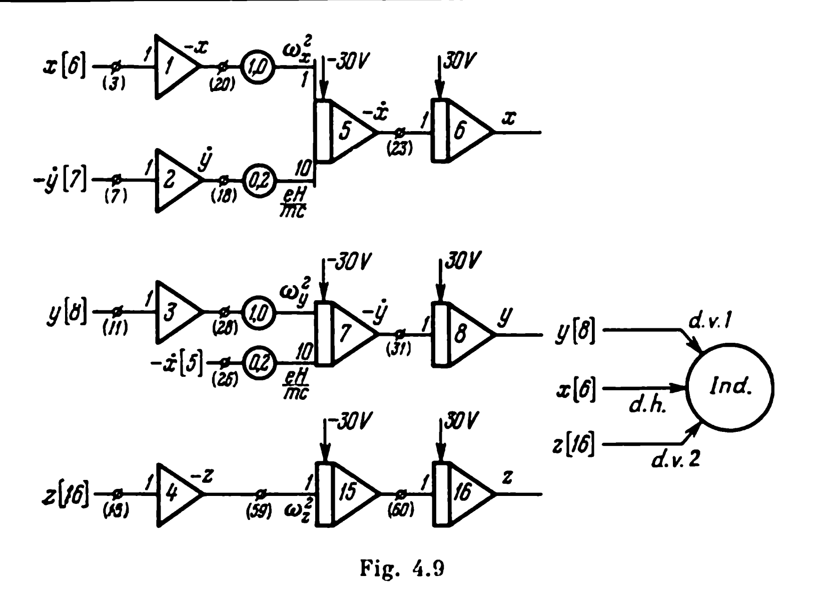


Fig. 4.9

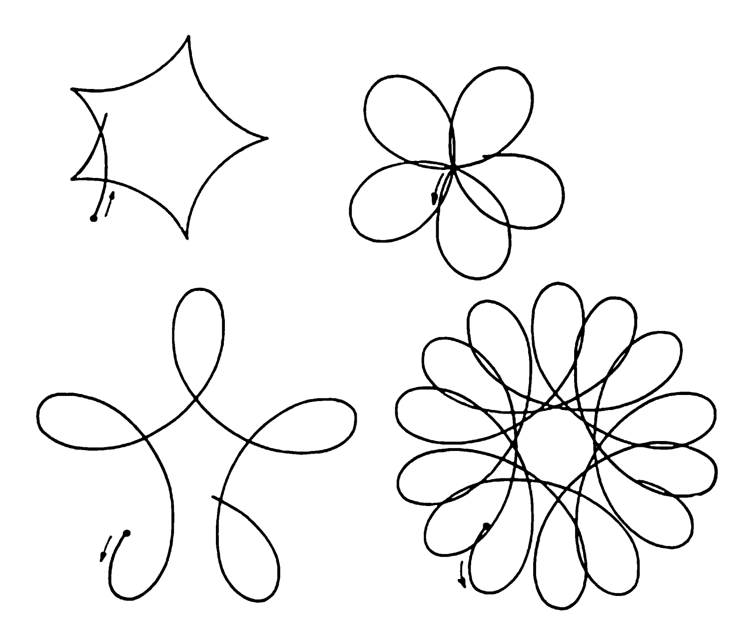


Fig. 4.10

entrées (20) et (28) des intégrateurs [5] et [7]. La quantité $\omega_H = \frac{eH}{mc} = 2$, cependant sa valeur numérique peut être modifiée à l'aide des potentiomètres placés aux entrées (18) et (26) des intégrateurs [5] et [7].

4. **Résultats de la simulation.** Les plus intéressantes sont les trajectoires *) situées dans le plan xOy. Elles dépendent essentiellement des conditions initiales, lesquelles définissent l'énergie initiale de l'oscillateur qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Quatre trajectoires de l'oscillateur isotrope sont représentées sur la figure 4.10. La trajectoire d'en haut à gauche correspond aux valeurs initiales $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, $x(0) = y(0) \neq \neq 0$ (l'oscillateur ne possède à l'instant initial qu'une énergie potentielle). La trajectoire est une hypocycloïde. La trajectoire d'en haut à droite qui est une rose correspond aux conditions initiales $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) \neq 0$, $x(0) = y(0) = 0$ (à l'instant initial l'oscillateur ne dispose que de l'énergie cinétique). Les deux trajectoires du bas qui ont la forme d'hypotrochoïdes allongées correspondent à des conditions initiales non nulles. La figure 4.11 représente également pour ce dernier cas l'hodographe de la vitesse $\dot{y} = \psi(\dot{x})$; pour l'obtenir sur l'écran il faut appliquer à l'entrée d.v. 1 (dév. verticale) de l'indicateur la sortie de l'intégrateur [7] et à l'entrée d.h. (dév. horizontale) la sortie de l'intégrateur [5].

La figure 4.12 représente le comportement d'un oscillateur spatial isotrope lorsque l'énergie se dissipe suivant la loi de Rayleigh $R = \frac{\alpha}{2}(\dot{x}_2 + \dot{y}_2)$. La perte d'énergie modifie les deux premières équations du système (4.6):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_x^2 x + \frac{eH}{mc}\dot{y} - \alpha\dot{x}, \\ \ddot{y} &= -\omega_y^2 y - \frac{eH}{mc}\dot{x} - \alpha\dot{y}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

où α est le coefficient de proportionnalité entre la vitesse et les projections $Q_x = -\frac{QR}{\partial x}$, $Q_y = -\frac{QR}{\partial y}$ de la résistance généralisée Q. Les derniers termes des équations (4.7) ne sont pas câblés sur la figure 4.9. Ils le sont par l'organisation des circuits de réaction dans les intégrateurs [5] et [7] par l'intermédiaire de potentiomètres de coefficients de transfert α. La trajectoire de droite correspond à de petites valeurs de α, celle de gauche aux valeurs doubles.

La figure 4.13 représente la trajectoire d'un oscillateur dissipant son énergie en présence d'une faible anisotropie ($\omega_x \neq \omega_y$) entraînant une certaine précession.

---

*) L'origine des trajectoires de l'oscillateur est marquée d'un point gras sur tous les dessins.

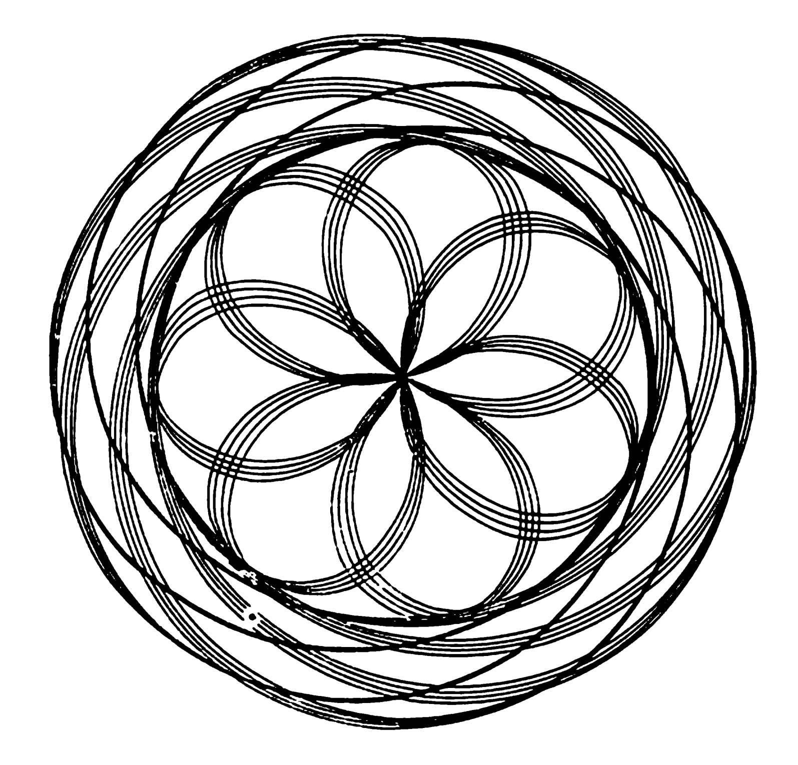


Fig. 4.11

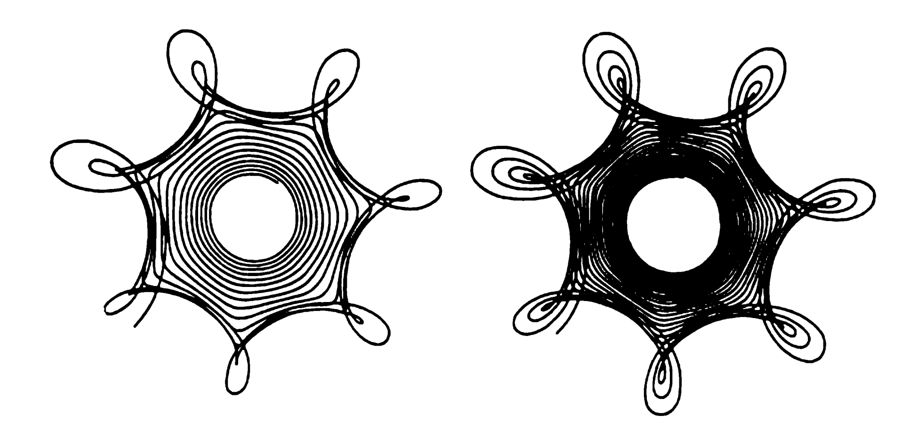


Fig. 4.12

§ 5. Charge dans des champs croisés

1. Position du problème. Le mouvement d'une charge dans divers champs est étudié en physique. Nous allons examiner le mouvement d'une charge sous l'action de deux champs constants et homogènes : un champ électrique et un magnétique. On se limitera

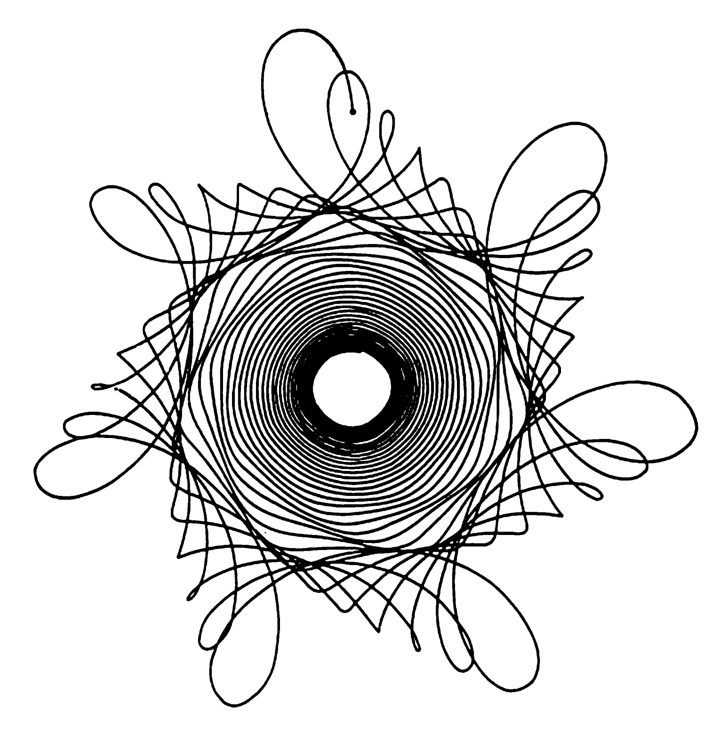


Fig. 4.13

au cas non relativiste où la vitesse de la charge est de beaucoup inférieure à celle de la lumière. Du cours de la physique on sait qu'il est nécessaire pour cela que le champ électrique soit petit devant le champ magnétique. Nous allons simuler les trajectoires du mouvement qui sont des courbes gauches.

2. Equations différentielles du mouvement. Prenons pour axe z la direction du champ magnétique $\boldsymbol{H}$ et pour plan yOz le plan tendu sur les vecteurs $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{E}$ (fig. 4.14). Les équations différentielles du mouvement s'écrivent

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{eE_y}{m} - \frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} = \frac{eE_z}{m}, \qquad (4.8)$$

où e est la charge, m sa masse, c la vitesse de la lumière.

3. Schéma de commutation. Le schéma simulant le système (4.8) pour $\omega_H = \frac{eH}{mc} = 2$, $\frac{E_y}{E_x} = 10$ est représenté sur la figure 4.15. A la quantité $\frac{eH}{m}$ correspond une tension électrique de 20 volts. Tous les paramètres peuvent varier dans des limites déterminées : la tension du champ électrique E à l'aide du diviseur D ; les projections E_y et E_z à l'aide du potentiomètre placé à la (28)-ième entrée de l'intégrateur [15] ; la quantité ω_H à l'aide des potentiomètres disposés aux (18)-ième et (26)-ième entrées des intégrateurs [5] et [7].

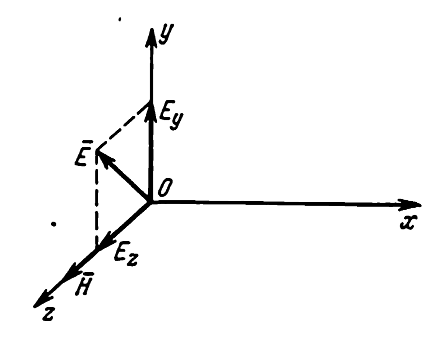


Fig. 4.14

4. Résultats de la simulation. La simulation de la trajectoire de la charge permet de mettre en évidence l'influence des paramètres

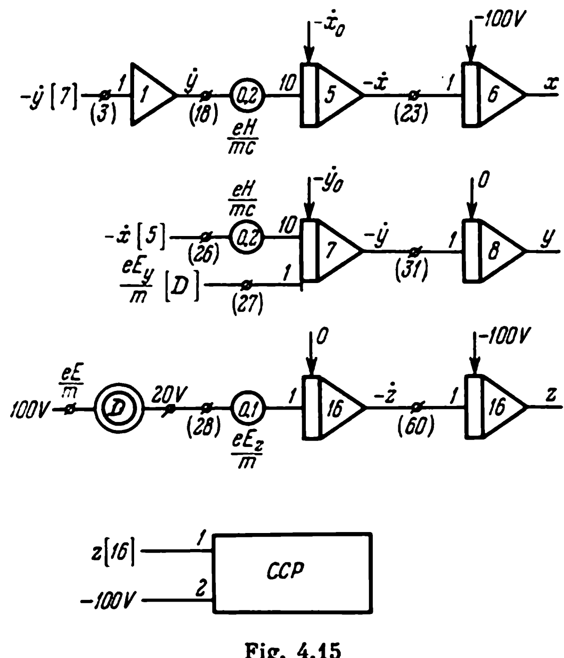


Fig. 4.15

E, H, e et des conditions initiales sur cette trajectoire. La projection de la trajectoire sur le plan de coordonnées yOx conduit aux trois

types de courbes de la figure 4.16 en fonction de la condition initiale $\dot{x}_0$ (intégrateur [5]) : la première trajectoire à partir du haut est une cycloïde ordinaire ($\dot{x}_0 = 0$) ; la deuxième, une cycloïde allongée

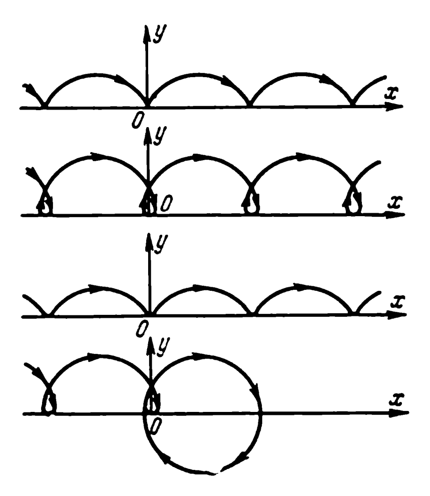


Fig. 4.16

($\dot{x}_0 = -5$ volts) ; la troisième, une cycloïde tronquée ($\dot{x}_0 = 5$ volts). Si pendant la simulation de la trajectoire on élimine le champ

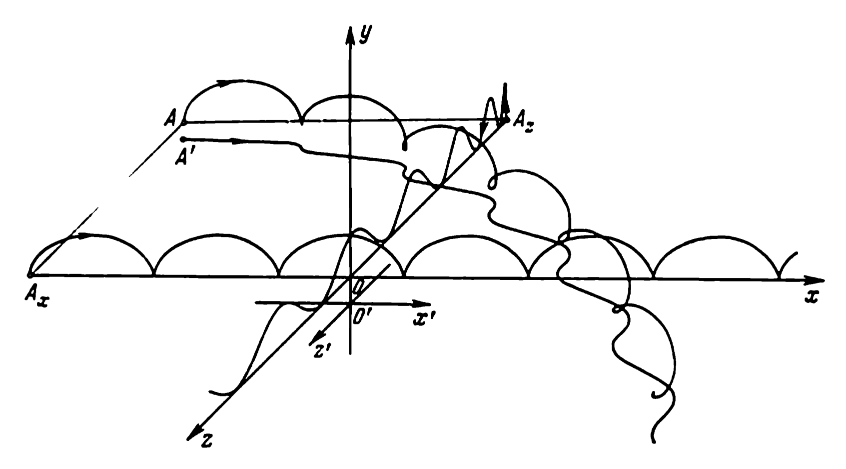


Fig. 4.17

électrique E (par exemple en coupant la tension 100 volts du diviseur D) la trajectoire de la charge se transforme en l'ellipse représentée tout en bas de la figure 4.16.

La figure 4.17 montre la trajectoire *) de la charge (pour $\dot{x}_0 = 0$) d'origine au point A (A_x, O, A_z) et ses projections sur les plans de coordonnées xOz et yOz. Au voisinage des points où la trajectoire

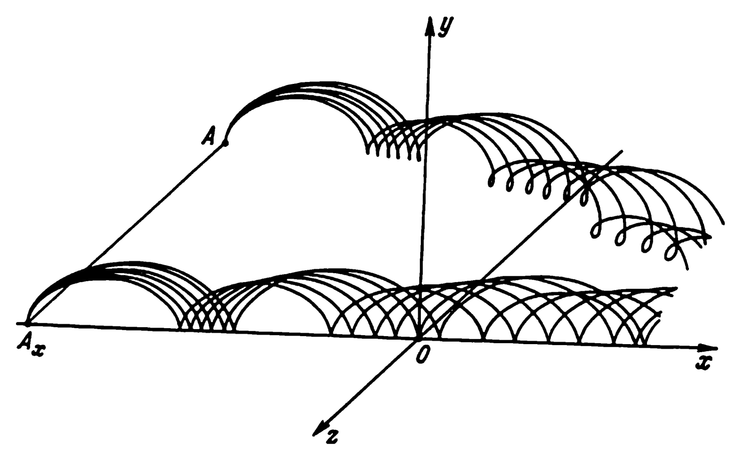


Fig. 4.18

est tangente au plan xOz, les projections sur xOz sont difficilement discernables, c'est pourquoi elles ont été effectuées sur un plan

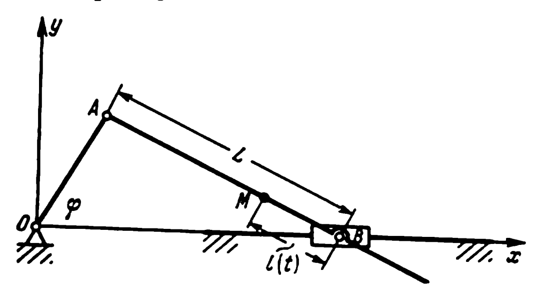


Fig. 4.19

$x'Oz'$ parallèle à xOy et situé légèrement plus bas.

La figure 4.18 représente un faisceau de trajectoires correspondant à diverses valeurs du champ électrique E. On voit que lorsque E croît, la période (ou base) de la cycloïde décroît.

On n'a pas représenté sur le schéma de la figure 4.15 les deux sommateurs nécessaires au tracé des trajectoires en fonction des variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

*) Pour la représentation des trajectoires voir Annexe.

§ 6. Système bielle-manivelle

1. Position du problème. La figure 4.19 représente un schéma cinématique d'un système bielle-manivelle à coulisseau. La manivelle OA effectue une rotation dans le sens rétrograde. Le coulisseau B est animé d'un mouvement de va-et-vient le long de l'axe Ox. La bielle AB effectue un mouvement plus compliqué. Chacun de ses points décrit une trajectoire différente de celle des autres. L'ensemble de toutes ces trajectoires s'appelle famille des courbes de la bielle.

2. Déduction d'expressions mathématiques favorables à la simulation. Supposons que la longueur de la manivelle OA soit égale à l'unité. La manivelle tourne à une vitesse angulaire constante ω. L'angle φ qu'elle fait avec l'axe Ox sera alors égal à ωt (i.e. $\varphi = \omega t$) et les coordonnées du point A de la manivelle seront

$$x_A(t) = \cos \omega t, \quad y_A(t) = \sin \omega t. \tag{4.9}$$

La longueur des éléments du système étant constante, à tout instant on aura l'égalité

$$(x_B - x_A)^2 + y_A^2 - L^2 = 0, \tag{4.10}$$

où x_B est l'abscisse du point B, L la longueur de la bielle AB.

Considérons sur la bielle AB un point mobile M et déplaçons-le de A vers B. Si la vitesse de M est suffisamment petite, sa trajectoire nous donnera une idée de la famille de courbes de la bielle. Soit $l(t)$ la distance de B à M. Les valeurs positives de $l(t)$ sont dirigées de B vers A. Introduisons la fonction non dimensionnelle $\mu(t) = l(t)/L$ qui permet d'exprimer aisément les coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$ du point M:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_A \mu(t), \\ x(t) &= x_B - (x_B - x_A)\,\mu(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les expressions (4.11) donnent la solution du problème si de (4.10) on tire x_B et on le porte avec (4.9) dans (4.11). Or l'expression de (4.10) est implicite en x_B. Pour expliciter x_B utilisons la méthode des fonctions implicites en vertu de laquelle x_B se détermine comme la solution de l'équation différentielle

$$x_B' = -\rho\,[(x_B - x_A)^2 + y_A^2 - L^2]\,\mathrm{sign}\,(x_B - x_A), \quad x_B(0) = 0,$$

où ρ est un nombre positif grand. Pour les systèmes bielle-manivelle existants, $x_B - x_A > 0$, donc la trajectoire du point est donnée en définitive par les expressions

$$x_A(t) = \cos \omega t, \quad y_A(t) = \sin \omega t,$$
$$x_B' = -\rho\,[(x_B - x_A)^2 + y_A^2 - L^2], \quad x_B(0) = 0,$$
$$\mu(t) = l(t)/L,$$
$$x = x_B - (x_B - x_A)\,\mu(t), \quad y = y_A\,\mu(t).$$

3. Schéma de commutation. Il est représenté sur la figure 4.20. Il correspond au cas $\omega = 10$, $L = 2$. Il est construit pour une fonction linéaire $\mu(t)$ définie sur l'intervalle $\mu \in [-1, 1]$. Les opérateurs [15], [5], [6] élaborent les variables $x_A(t)$, $y_A(t)$. L'intégrateur [9] délivre la fonction $\mu(t)$. L'intégrateur monté sur la base de l'*AO* [10] reproduit $x_B(t)$ en résolvant l'équation implicite (4.10).

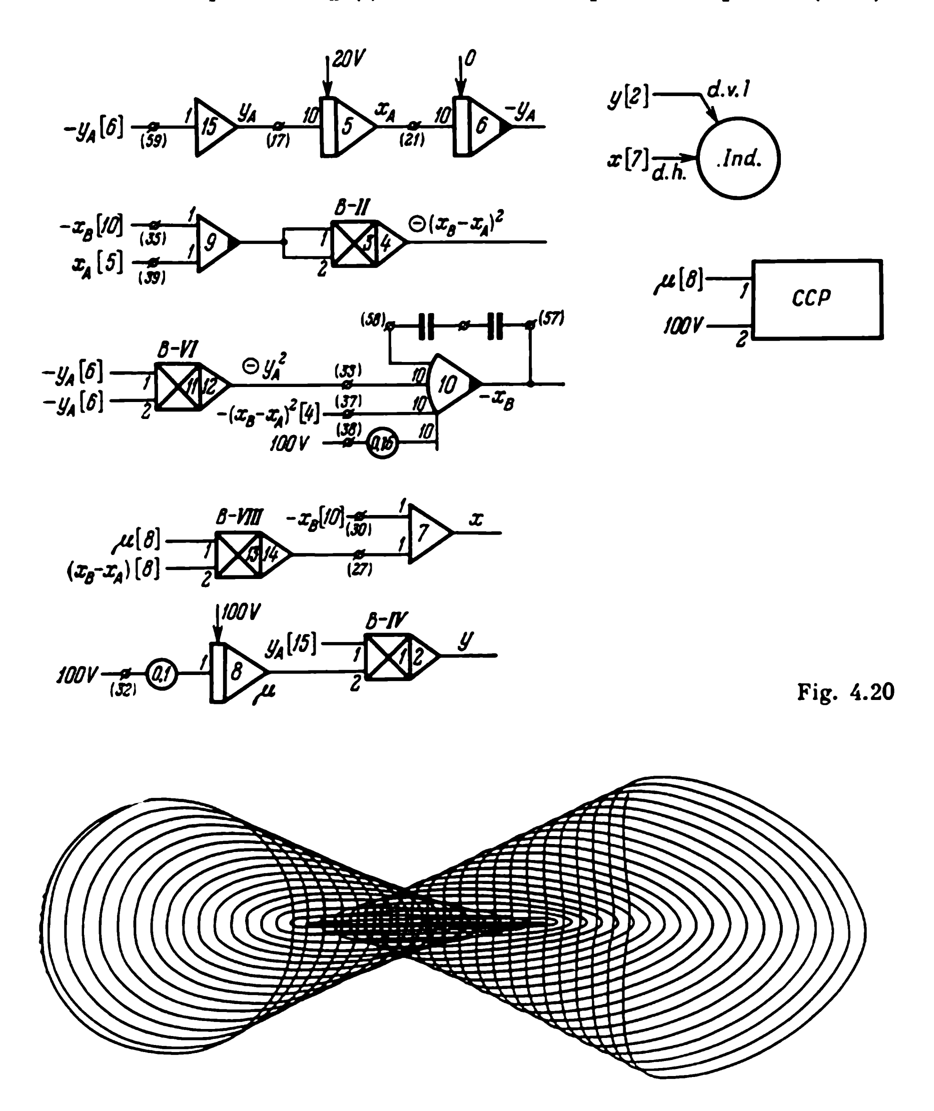


Fig. 4.20

Fig. 4.21

4. Résultats. La trajectoire du point M est représentée sur la figure 4.21. Elle est simulée pendant 20 secondes. La durée de simulation de la trajectoire ne dépend que de la vitesse du point M sur la bielle AB. Cette vitesse peut être modifiée à l'aide du potentiomètre placé à l'entrée (32) de l'intégrateur [8]. Le point M peut être fixé en tout lieu de la bielle, i.e. on peut prendre $\tilde{\mu}(t) = \text{const}$. Pour cela, après avoir mis la machine en marche, il faut rompre la liaison à l'entrée (32) de l'intégrateur [8].

§ 7. Hystérésis

1. Position du problème. Pour fixer les idées nous allons examiner l'hystérésis magnétique qui est le type le plus connu. L'hystérésis magnétique se manifeste dans les modifications irréversibles de l'aimantation de ferromagnétiques dans un cycle d'aimantation. L'aimantation des ferromagnétiques est en rétard sur le champ magnétique extérieur qui est une fonction du temps. On rencontre des phénomènes analogues en étudiant des ferro-électriques, des systèmes mécaniques (lien entre les tensions et la déformation du matériel), etc. Tous ces phénomènes sont simulés d'une façon analogue. On se propose de simuler une boucle d'hystérésis de ferromagnétiques et d'étudier ces derniers en fonction du champ extérieur et de leurs propriétés internes.

2. Modèle mathématique de l'inversion de l'aimantation. Notre modèle mathématique est basé sur la théorie de l'anisotropie d'Akoulov en vertu de laquelle un monocristal de ferromagnétique se comporte dans un champ extérieur de sorte à minimiser son énergie libre totale w qui est la somme de l'énergie magnétique d'anisotropie w_{an} et de l'énergie w' par rapport au champ magnétique extérieur *), soit

$$w(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}) = w_{\text{an}}(\boldsymbol{j}) + w'(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}),$$

où $\boldsymbol{j}$ est le vecteur d'aimantation, $\boldsymbol{H}$ l'intensité du champ magnétique extérieur. Pour tout vecteur $\boldsymbol{H}$ fixe, on détermine le vecteur $\boldsymbol{j}$ à partir de la condition d'équilibre thermodynamique

$$\text{grad}\, w(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}) = 0. \tag{4.12}$$

Pour tracer la courbe statique d'aimantation $\boldsymbol{j} = \psi(\boldsymbol{H})$, on se donne une collection de valeurs de $\boldsymbol{H}$ et l'on calcule les $\boldsymbol{j}$ correspondants à l'aide de la condition (4.12).

Pour simuler le mouvement d'un processus thermodynamique déséquilibré $\boldsymbol{j}(t)$ vers son état d'équilibre il importe de tenir compte de la nature de ce mouvement.

---

*) On suppose que l'aimantation du ferromagnétique est définie exclusivement par la rotation du vecteur d'aimantation.

Nous adoptons l'hypothèse linéaire qui est valable dans un certain voisinage de l'état d'équilibre et qui suppose que j (t) tend vers l'état d'équilibre à une vitesse proportionnelle à grad w, i.e.

$$\frac{dj}{dt} = -\nu \operatorname{grad} w(j, H), \tag{4.13}$$

où ν est une constante positive déterminée par le type de ferromagnétique.

A titre d'exemple concret considérons l'inversion d'aimantation d'un ferromagnétique pour lequel Akoulov a trouvé analytiquement et étudié la courbe statique d'aimantation. Ce ferromagnétique est un monocristal à symétrie cubique ayant la forme d'un fil fin. Suivant Akoulov, l'expression de l'énergie libre aux termes multiplicatifs et additifs constants près est

$$w(j, H) = \frac{j^2}{2}\left(\frac{j^2}{2} - \alpha\right) - jH(t), \tag{4.14}$$

où α est une constante déterminée par le ferromagnétique.

En vertu de (4.13) on a pour (4.14)

$$\frac{dj}{dt} = \nu\,[H(t) - j^3 + \alpha j].$$

En vertu de (4.12) l'équilibre est réalisé pour des valeurs de j et des valeurs de H égales à S, telles que

$$S - j^3 + \alpha j = 0. \tag{4.15}$$

3. Schéma de commutation simulant une boucle d'hystérésis. La figure 4.22 représente un schéma de commutation permettant

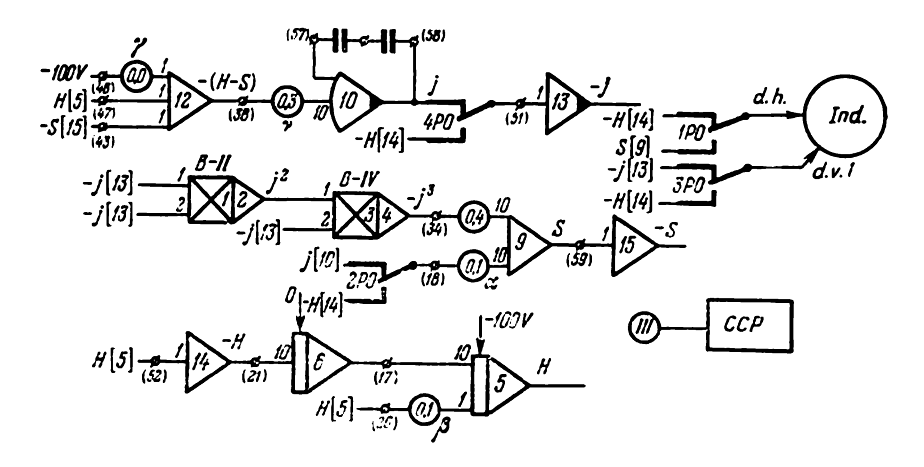


Fig. 4.22

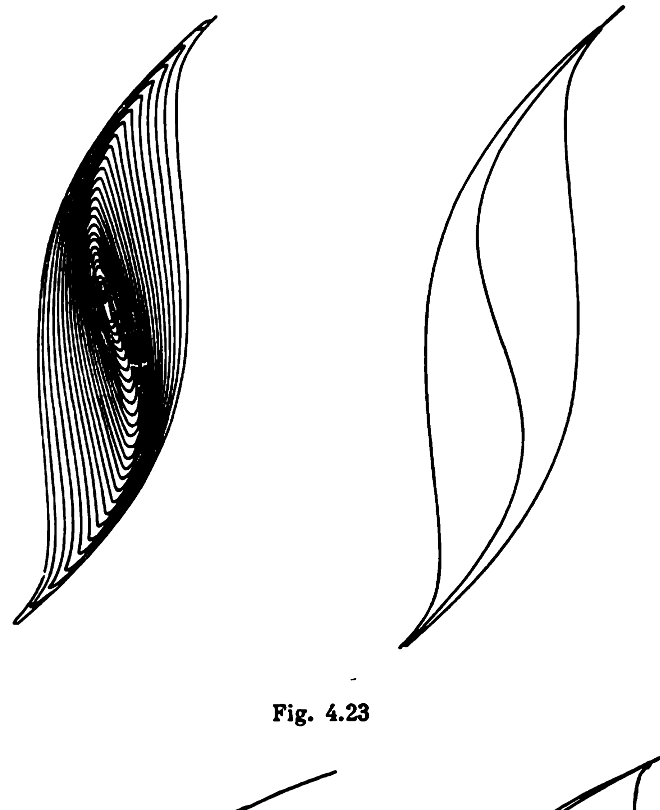


Fig. 4.23

Fig. 4.24

d'étudier l'hystérésis d'un ferromagnétique pour diverses valeurs des paramètres lorsque l'inversion d'aimantation s'effectue sous l'action d'un champ de la forme

$$H(t) = \exp(-\beta t) \sin \omega t + \gamma,$$

où β, ω, γ sont des constantes arbitraires. Le schéma fonctionne en deux régimes selon le signe de la tension qui est appliquée à l'entrée du circuit de commande préprogrammée. Le premier régime auquel correspond la position des contacts du relais indiquée sur la figure simule la boucle sous forme d'une fonction explicite $j(H)$. Le deuxième régime simule une courbe en forme de S correspondant à l'état d'équilibre, d'après l'équation (4.15). Les opérateurs [14], [6], [5] délivrent la fonction $H(t) = \exp(-\beta t) \sin \omega t$ pour $\omega = 10$ et un $\beta \in [0, 1]$. L'aimantation constante γ est donnée à l'aide du potentiomètre du sommateur [12] à l'entrée (48). Les paramètres α et ν du ferromagnétique sont donnés respectivement aux entrées (18) et (38) des opérateurs [9] et [10].

4. **Résultats de la simulation.** Sur la figure 4.23 sont représentées, à droite, la boucle d'aimantation et la S-courbe du minimum de l'énergie libre du ferromagnétique pour $\alpha = 0$, sous l'action d'un champ extérieur sinusoïdal d'amplitude constante ($\beta = 0$) ; à gauche est représentée l'inversion d' aimantation du même ferromagnétique sous l'action d'un champ magnétique sinusoïdal dont l'amplitude décroît exponentiellement ($\beta \neq 0$).

La figure 4.24 représente à gauche et à droite l'inversion d'aimantation d'un ferromagnétique dont $\alpha \neq 0$ sous l'action des champs sinusoïdaux extérieurs, d'amplitude constante et décroissante. Comme $\alpha \neq 0$ la S-courbe possède une forme plus convexe qui correspond aux ferromagnétiques dont la boucle d'hystérésis est rectangulaire. La rectangularité de l'hystérésis est nettement marquée lorsque l'inversion d'aimantation est effectuée dans un champ d'amplitude décroissante. Dans ce cas l'aimantation du ferromagnétique est caractérisée par l'existence de deux états stables dont l'un marque la fin de l'inversion d'aimantation.

La boucle conserve sa forme pour diverses valeurs de ν et ω pourvu que le rapport $\frac{\nu}{\omega} = \text{const}$. Si ce rapport diminue la courbe prend la forme d'une ellipse caractéristique de l'hystérésis linéaire.

§ 8. Représentation d'une courbe gauche

1. **Position du problème.** Etant donnée une courbe gauche sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \exp(-\alpha_1 t) \cos \omega_1 t, \\ z_2 &= a_2 \exp(-\alpha_2 t) \cos \omega_2 t, \\ z_3 &= a_1 \exp(-\alpha_1 t) \sin \omega_1 t, \end{aligned} \qquad (4.16)$$

on demande de la visualiser pour diverses valeurs des paramètres α_1, α_2, ω_1, ω_2.

2. Déduction des équations différentielles. Les équations différentielles déterminantes pour (4.16) se trouvent sans peine par une dérivation successive de (4.16) si l'on introduit la fonction auxiliaire

$$z_4 = a_2 \exp(-\alpha_2 t) \sin \omega_2 t.$$

En dérivant successivement et en comparant les expressions des dérivées on obtient

$$\begin{aligned} z_1' &= -\alpha_1 z_1 - \omega_1 z_3, & z_1(0) &= a_1, \\ z_2' &= -\alpha_2 z_2 - \omega_2 z_4, & z_2(0) &= a_2, \\ z_3' &= -\alpha_1 z_3 + \omega_1 z_1, & z_3(0) &= 0, \\ z_4' &= -\alpha_2 z_4 + \omega_2 z_2, & z_4(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pour représenter la courbe gauche (4.16) à l'aide des équations déterminantes (4.17) il est nécessaire (cf. Annexe) de câbler les

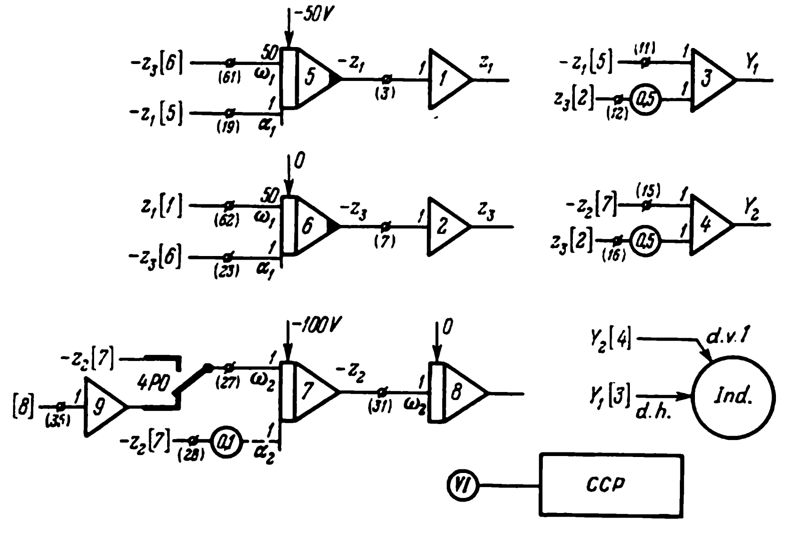


Fig. 4.25

variables Y_1, Y_2 qui projettent le système de coordonnées $Oz_1z_2z_3$ sur le plan Y_1OY_2 confondu avec z_1Oz_2:

$$Y_1 = z_1 - 0{,}5z_3, \quad Y_2 = z_2 - 0{,}5z_3. \tag{4.18}$$

3. Schéma de commutation. Il est représenté sur la figure 4.25. Il simule les équations différentielles (4.17) et les expressions (4.18). Il comporte un arrêt conditionnel au changement de signe de la

variable d'entrée du circuit de commande préprogrammée. Dans la position des contacts du relais représentée sur le schéma, le circuit délivre la variable z_2 pour $\omega_2 \neq 0$ et α_2 quelconque. Lorsque la variable d'entrée change de signe, le circuit de commande préprogrammée reproduit le cas où $\omega_2 = 0$. Sur le plan « électronique », les sorties des opérateurs [5] et [6] sont inhabituelles en ce sens qu'elles ont été faites plus puissantes par adjonction de résistances anodiques.

4. **Résultats.** On rencontre les courbes gauches du type (4.16) lorsqu'on étudie les faibles oscillations de systèmes oscillants à plusieurs degrés de liberté.

Trois cas facilement simulables à l'aide du schéma de commutation de la figure 4.25 présentent un intérêt mathématique selon les valeurs numériques des paramètres ω_2 et α_2.

Premier cas. On suppose que $\omega_2 = 0$. L'équation (4.16) s'écrit

$$z_1 = a_1 \exp(-\alpha_1 t) \cos \omega_1 t, \quad z_2 = a_2 \exp(-\alpha_2 t), \qquad z_3 = a_1 \exp(-\alpha_1 t) \sin \omega_1 t. \tag{4.19}$$

On détermine sans peine la nature de la surface (4.19), en élevant la première et la troisième expression au carré, en les ajoutant et en effectuant quelques transformations:

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \left(\frac{z_2^2}{a_2^2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + \frac{z_3^2}{a_1^2} = 0. \tag{4.20}$$

On reconnaît dans (4.20) l'expression canonique d'un cône circulaire droit

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_1^2} = 0. \tag{4.21}$$

La surface (4.20) sera donc appelée cône circulaire généralisé. L'équation (4.20) se transforme en (4.21) pour $\alpha_1 = \alpha_2$. Fait curieux, lorsque $\alpha_1/\alpha_2 = 0{,}5$, l'équation décrit un paraboloïde de révolution. La surface (4.20) possède de nombreuses propriétés d'une conique:

— c'est une surface de révolution autour de l'axe Oz;

— elle possède deux nappes correspondant aux valeurs positives et négatives de z_2;

— ces deux nappes se touchent à l'origine des coordonnées qui est un point asymptotique de la courbe (4.16).

En modifiant la valeur du rapport α_1/α_2 on simule les courbes (4.16) appartenant à diverses surfaces de révolution, et partant on obtient la représentation graphique de la surface. La figure 4.26 représente trois trajectoires pour les rapports $\alpha_1/\alpha_2 < 1$, $\alpha_1/\alpha_2 > 1$ et, $\alpha_1/\alpha_2 = 1$ (de haut en bas). On change les coefficients α_1 et α_2 en éliminant et en rétablissant les liaisons des intégrateurs [5], [6] et [7] respectivement aux entrées (19), (23) et (27), (28). Pour tracer une courbe

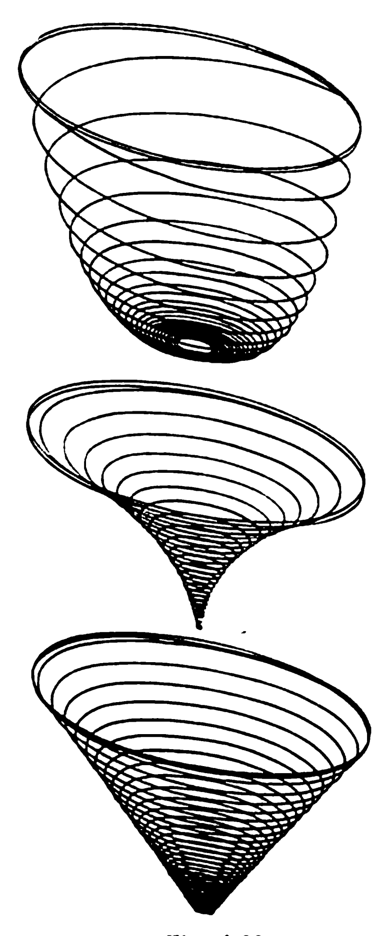


Fig. 4.26

de la deuxième nappe il faut changer le signe de la condition initiale de l'intégrateur [7]. Les courbes de la figure 4.26 donnent une image assez expressive de la surface et notamment de sa courbure. D'une façon générale, les lignes de courbure d'une surface de révolution sont des méridiens et des parallèles. Un centre de courbure est situé sur l'axe de révolution, l'autre sur la développée du méridien. La normale au méridien est dirigée vers l'intérieur de la surface si $\alpha_1/\alpha_2 < 1$ et vers l'extérieur si $\alpha_1/\alpha_2 > 1$. Le rayon de courbure du méridien devient infini dans le cas d'un cône droit.

Deuxième cas. On suppose $\alpha_2 = 0$, ce qui se traduit, comme le montre la figure 4.25, par une élimination de l'entrée (28) de l'intégrateur [7] et la mise en position basse (représentée sur le

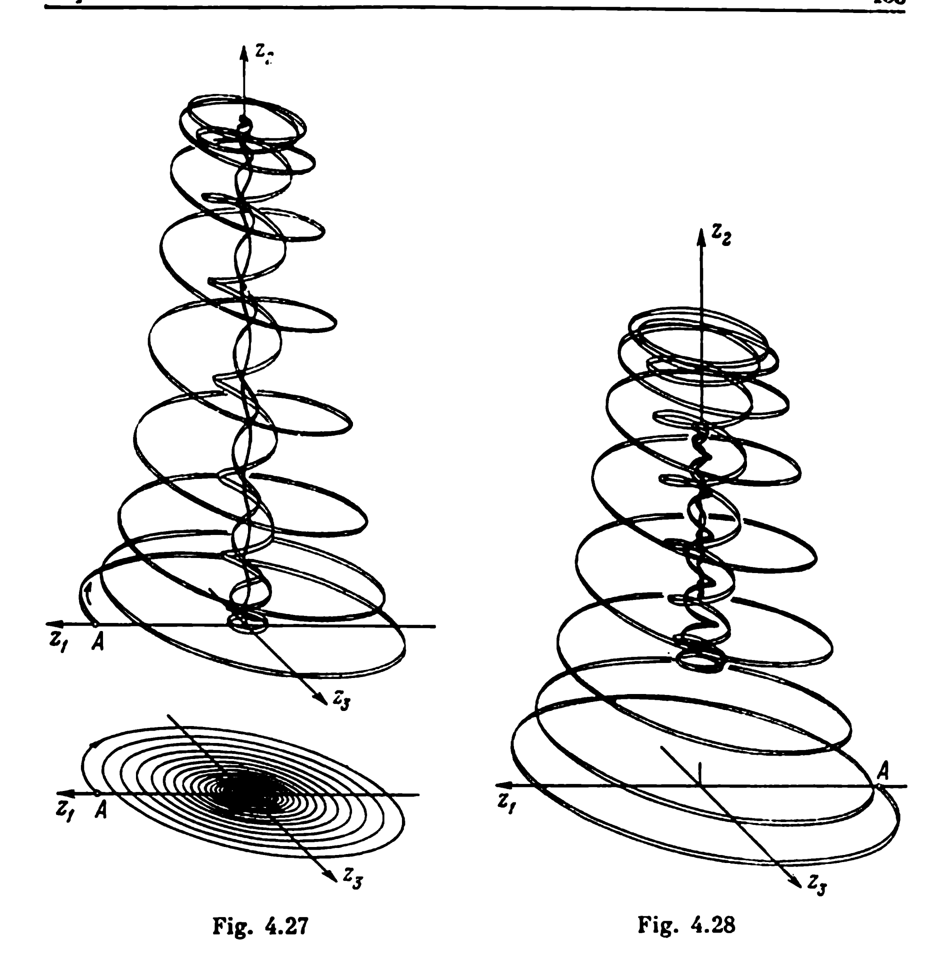


Fig. 4.27

Fig. 4.28

dessin) du contact 4PO du relais opérationnel. La machine réalise alors la courbe

$$z_1 = a_1 \exp(-\alpha_1 t) \cos \omega_1 t, \qquad z_2 = a_2 \cos \omega_2 t,$$

$$z_3 = a_1 \exp(-\alpha_1 t) \sin \omega_1 t,$$

qui admet l'interprétation physique suivante. On possède un oscillateur spatial effectuant dans le plan z_1Oz_3 des oscillations harmoniques amorties et simultanément des oscillations harmoniques non amorties le long de l'axe Oz_2. La courbe gauche correspondante est tracée sur la figure 4.27. Elle est simulée par la machine à partir du point A $(a_1, -a_2, 0)$ dans le sens de la flèche. La projection de cette courbe sur le plan z_1Oz_3 est la spirale logarithmique représentée dans la partie inférieure de la figure. La courbe dégénère

en une droite confondue avec l'axe Oz_2 lorsque les oscillations s'amortissent dans le plan z_1Oz_3 pour de grandes valeurs de t.

Troisième cas. La figure 4.28 représente la courbe qui correspond aux équations (4.17). On remarque que la trajectoire est issue du point A $(-a_1, -a_2, 0)$ et tend asymptotiquement vers l'origine des coordonnées. Pour le reste le processus se poursuit comme dans le cas précédent. Le coefficient de transfert α_2 est donné par une réaction branchée à l'entrée (28) de l'intégrateur [7]. Cette réaction est représentée en pointillé sur la figure 4.25.

§ 9. Courbe sur une quadrique

1. Position du problème. On demande de tracer une courbe gauche située sur une quadrique: ellipsoïde, hyperboloïde (à une et deux nappes), cône, paraboloïde elliptique.

2. Déduction d'expressions mathématiques favorables à la simulation. A signaler au départ que ce problème est indéterminé, car par un point d'une quadrique il passe une infinité de courbes gauches. Nous essayerons de lever cette indétermination de manière à ce que, premièrement, la courbe tracée puisse donner une idée suggestive de la quadrique qui la contient, et, deuxièmement, pour que le schèma de commutation soit facilement réalisable. Les formes canoniques des quadriques citées précédemment possèdent de nombreux points communs ce qui permet d'étudier tous les cas avec un seul schéma de commutation. Une courbe gauche est représentée paramétriquement par trois fonctions: $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, dont deux sont arbitraires et la troisième déterminée à l'aide de l'équation de la quadrique.

Les formes canoniques des quadriques mentionnées s'écrivent:

$$\begin{aligned}
&\text{l'ellipsoïde:} && \frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1,\\
&\text{l'hyperboloïde à une nappe:} && \frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1,\\
&\text{l'hyperboloïde à deux nappes:} && \frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=-1,\\
&\text{le cône:} && \frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=0,\\
&\text{le paraboloïde elliptique:} && \frac{z_1^2}{a_1^2}-z_2+\frac{z_3^2}{a_3^2}=0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Les quadriques (4.22) sont toutes des surfaces de révolution autour de l'axe Oz_2. On se donnera tout naturellement la projection de la courbe gauche à simuler sur le plan z_1Oz_3 sous forme d'une spirale enroulante dont la représentation paramétrique est

$$z_1 = a \exp(-\alpha t) \cos \omega t, \quad z_3 = a \exp(-\alpha t) \sin \omega t. \tag{4.23}$$

En d'autres termes, la courbe gauche à simuler est considérée comme l'intersection de deux surfaces: la surface (4.22) et une surface cylindrique dont la directrice (4.23) est une spirale logarithmique et la génératrice parallèle à Oz_2. Dans la suite, pour simplifier les schémas on se limitera au cas $a_1 = a_2 = a$. Plus ω est prépondérant devant α, plus la spirale logarithmique remplira le disque $z_2^2 + z_3^2 = a^2$. On obtient le tracé de la courbe à l'aide des formules $Y_1 = z_1 - 0{,}5\ z_3$, $Y_2 = z_2 - 0{,}5\ z_3$ (cf. Annexe), où z_1, z_2 et z_3 proviennent de (4.23) et (4.22).

3. Schéma de commutation. Il est représenté sur la figure 4.29. Les opérateurs [5], [6], [1], [2] délivrent les fonctions $z_1(t)$ et $z_3(t)$ d'après leurs équations différentielles déterminantes. Les sommateurs [3] et [4] élaborent les variables Y_1 et Y_2. Les autres opérateurs

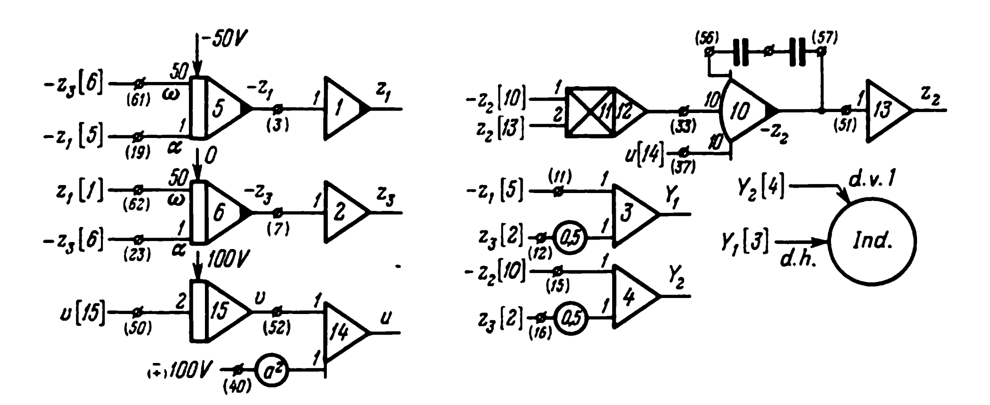


Fig. 4.29

sont utilisés à la résolution des équations (4.22) par rapport à $z_2(t)$. A cet effet il faut câbler les deux fonctions supplémentaires: $v = \exp(-2\alpha t)$, $u = (\pm)\, a^2\, (\mp) \exp(-2\alpha t)$.

4. Tracé de la courbe gauche. Passons à l'étude des diverses surfaces.

1) Ellipsoïde. La courbe est tracée à l'aide du schéma de la figure 4.29. La variable $z_2(t)$ est élaborée à l'aide de l'expression

$$z_2 = \pm \frac{a^2}{a} \sqrt{a^2 - \exp(-2\alpha t)}.$$

Le coefficient de transfert à l'entrée (40) du sommateur [14] doit être légèrement supérieur à l'unité (de l'ordre de 1,1). La courbe située sur l'ellipsoïde est tracée sur la figure 4.30 pour les valeurs positives et négatives de z_2. Dans les deux cas elle est issue de A.

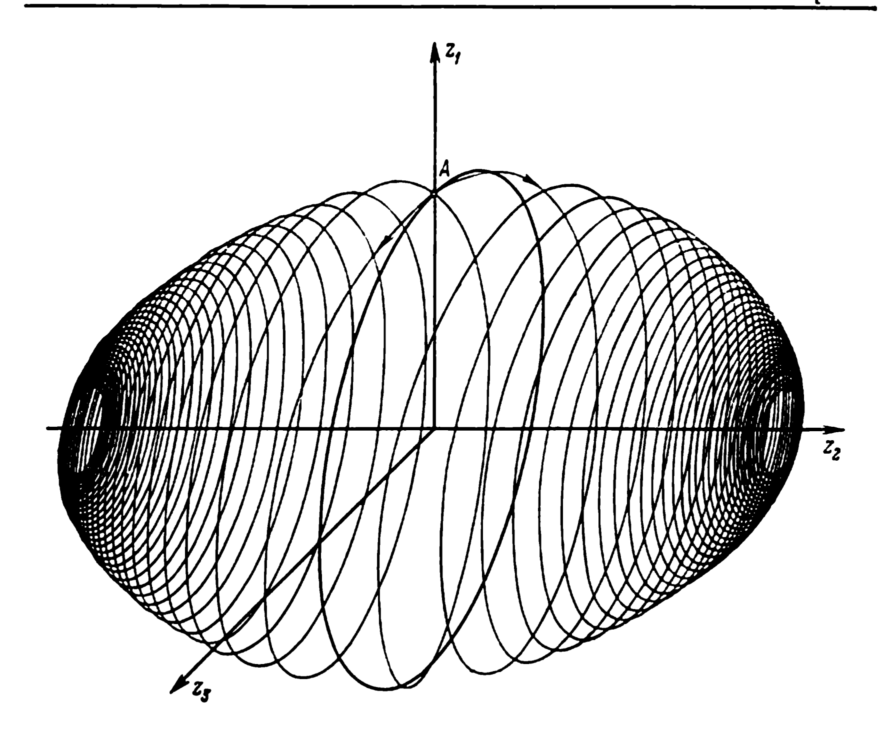


Fig. 4.30

2) Hyperboloïde à une nappe. La variable $z_2(t)$ est réalisée à l'aide de la formule

$$z_2 = \pm \frac{a_2}{a} \sqrt{-a^2 + \exp(-2\alpha t)}.$$

La courbe est tracée jusqu'à l'instant où l'inégalité $\exp(-2\alpha t) > a^2$ cesse d'être valable. Ceci étant, il faudra réduire jusqu'à 0,1 le coefficient de transfert du sommateur [14] à l'entrée (40); changer le signe de la tension à cette entrée; changer le signe de la condition initiale de l'intégrateur [15].

La courbe est tracée deux fois (cf. fig. 4.31): à partir du point A_1 pour les z_2 positifs et à partir de A_2 pour les z_2 négatifs.

Au-dessus et au-dessous de l'hyperboloïde on constate la présence d'anneaux plans entièrement remplis par une spirale logarithmique enroulante. Ces anneaux se forment lorsque $\exp(-2\alpha t) < a^2$: le radicande de l'expression de z_2 devient négatif et z_2 ne possède plus de valeurs réelles correspondant à z_1 et z_3. Pour éviter l'apparition de ces anneaux il aurait fallu prévoir une interruption du tracé de la courbe par un circuit de commande préprogrammée à la condition

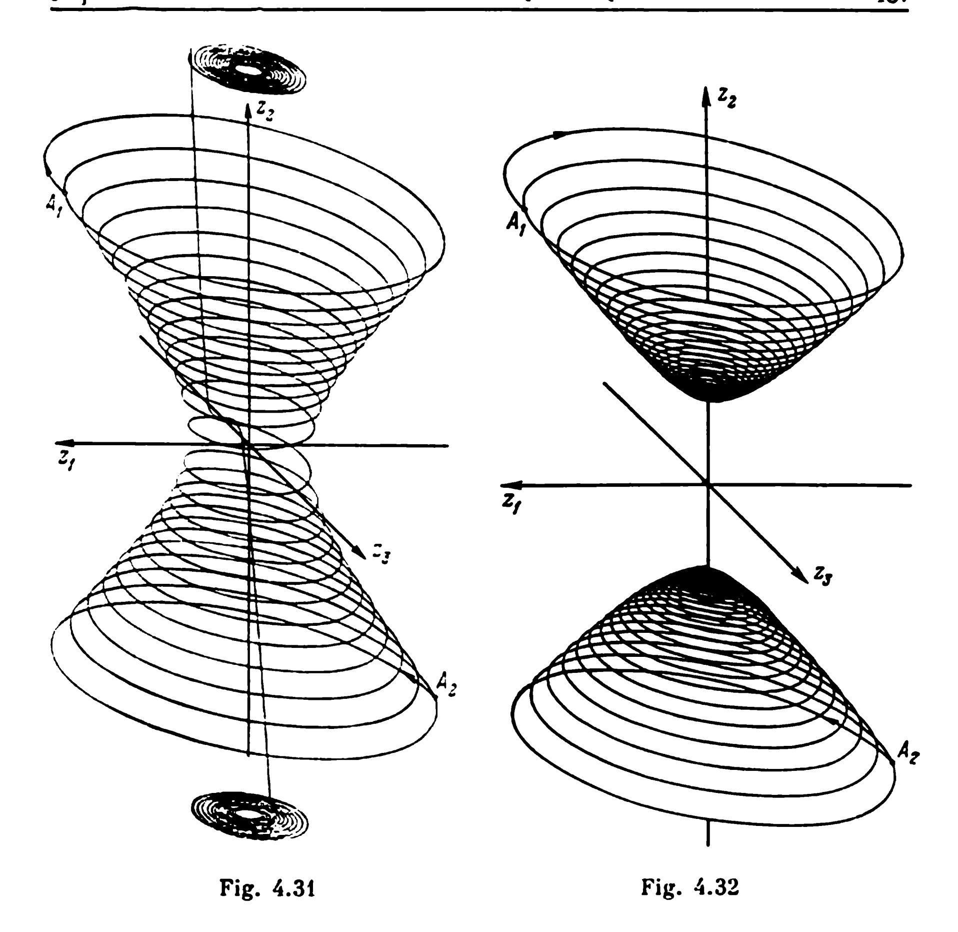


Fig. 4.31 Fig. 4.32

$-a_2+\exp(-2\alpha t)=0$. On adopte cette solution en pareils cas. Si nous avons refusé de le faire, c'est pour montrer comment se comporte la machine devant des racines imaginaires. La machine a donc « rejeté » la valeur imaginaire de la plage ± 100 volts et a continué à délivrer les variables z_1 et z_3 comme d'habitude. En réalité le changement de signe de la variable $u(t)$ à l'entrée (37) de l'amplificateur [10] chargé de l'extraction de racine transforme la réaction négative en positive.

3) H y p e r b o l o ï d e à d e u x n a p p e s. Le tracé dela courbe sur un hyperboloïde à deux nappes s'obtient par le câblage de

$$z_2=\pm\frac{a_2}{a}\sqrt{a^2+\exp(-2\alpha t)}$$

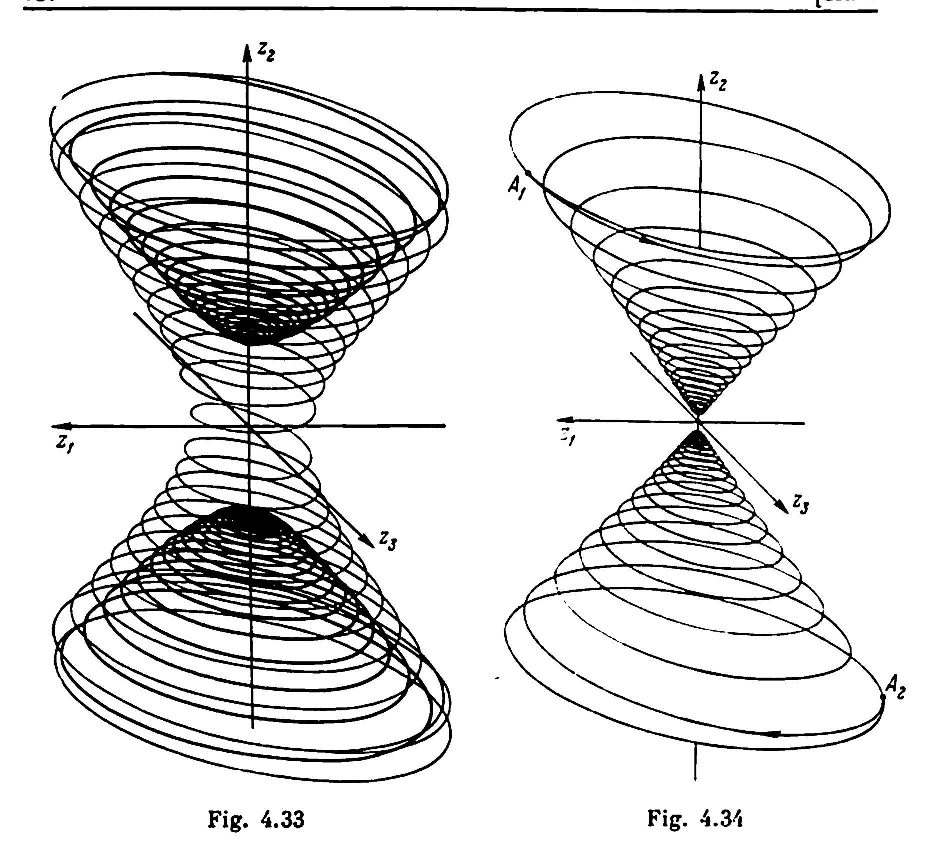


Fig. 4.33

Fig. 4.34

qui nécessite le changement du signe de la constante (—100 volts) à l'entrée (40) du sommateur [14]. La figure 4.32 représente une courbe d'un hyperboloïde à deux nappes.

Il est intéressant de tracer simultanément des courbes situées sur un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes. Ce cas est représenté sur la figure 4.33. Le circuit de commande préprogrammée évite l'apparition de valeurs imaginaires de z_2 à la condition $\exp(-2\alpha t) = a^2$.

4) Cône. On obtient un cône en câblant la variable

$$z_2 = \pm (a_2/a) \exp(-\alpha t).$$

A cet effet il faut annuler le coefficient de transfert à l'entrée (40) du sommateur [14] (en opérant une déconnexion à cette entrée par exemple). La courbe est représentée sur la figure 4.34. Les sommets des cônes auraient dû coïncider à l'origine des coordonnées, mais nous avons évité cela en utilisant un traceur à deux coordonnées. Pour tracer la courbe il faut augmenter sensiblement le temps de

résolution du problème, afin que le traceur ait le temps de « suivre » la courbe. Les fonctions $z_1(t)$ et $z_3(t)$ varient très lentement au voisinage de l'origine des coordonnées. Le temps de reproduction

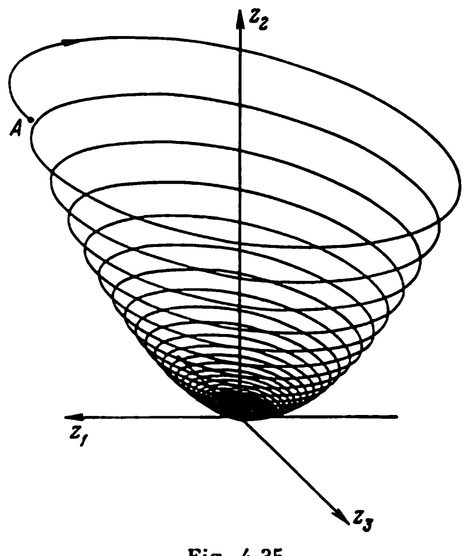


Fig. 4.35

de la courbe par la machine risquait d'être supérieur au temps admissible d'intégration.

5) Paraboloïde elliptique. La variable $z_2(t)$ est délivrée par l'intégrateur [15] sous la forme $z_2(t) = a^{-2} \exp(-2\alpha t)$. La courbe correspondante est représentée sur la figure 4.35.

§ 10. Représentation graphique d'une surface de révolution

1. Position du problème. Une surface de révolution est donnée par les équations

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos v)\sin u, \\ y &= (a + b\cos v)\cos u, \\ z &= c\sin v, \end{aligned} \qquad (4.24)$$

où u et v sont les coordonnées géographiques: u la longitude, v la latitude. Les équations (4.24) définissent une surface de révolution (un tore) engendrée par la rotation de l'ellipse $x = a + b\cos v$, $z = c\sin v$ autour de l'axe Oz. Lorsque $a = 0$, le tore se transforme en un ellipsoïde qui à son tour se transforme en une sphère pour $b = c$.

On se propose de représenter graphiquement la surface (4.24).

2. Déduction d'expressions mathématiques favorables à la simulation. Les lignes $u=$const et $v=$ const du tore sont respectivement appelées méridiens et parallèles. La représentation graphique des méridiens et des parallèles donne une vue d'ensemble de la surface qui les porte. Mais le câblage de (4.24) conduit à des schémas volumineux et difficilement réalisables, c'est pourquoi il faut adjoindre aux équations (4.24) une relation reliant u et v. On obtient cette relation par les raisonnements suivants. A tout couple de nombres (u, v) mod 2π correspond un point et un seul sur la surface du tore. Soit une carte plane du tore rapportée à un réseau rectangulaire $u =$ const, $v =$ const. A tout point du tore est associé un point et un seul de la carte. A la droite

$$u = \omega_1 t, \quad v = \omega_2 t,$$

où ω_1, ω_2 sont des constantes et t un paramètre, est associée sur la surface une courbe coupant les méridiens (respectivement les parallèles) sous un certain angle constant. Les courbes qui coupent sous un angle constant les méridiens (les parallèles) de la surface qui les porte sont appelées *loxodromies*. Soient deux loxodromies orthogonales, la deuxième ayant pour équation

$$u = -\omega_2 t, \quad v = \omega_1 t.$$

Si $\omega_1/\omega_2 \gg 1$ la première loxodromie donne une idée suggestive de la disposition des méridiens, la seconde, de la disposition des parallèles. Le câblage de la relation linéaire entre u et v conjointement avec (4.24) simplifie beaucoup le tracé des surfaces de révolution.

3. Schéma de commutation. Il est représenté sur la figure 4.36. Les opérateurs [7], [8], [2] élaborent les fonctions sin $\omega_1 t$, cos $\omega_1 t$; les opérateurs [16], [15], [13], les fonctions sin $\omega_2 t$, cos $\omega_2 t$ d'après leurs équations différentielles déterminantes pour les valeurs numériques des paramètres $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 0{,}3$. Les opérateurs [1], [3], [4], [11], [12], [14] réalisent l'expression (4.24). Les paramètres a, b, c du tore peuvent varier dans des limites déterminées: a et b respectivement aux entrées (4) et (8) du sommateur [1], c à l'entrée (44) du sommateur [14]. Les sommateurs [9] et [10] projettent le système de coordonnées x, y, z sur le plan Y_1OY_2 de l'écran de l'indicateur qui coïncide avec le plan zOx. La projection s'obtient par génération des expressions $Y_1 = z - 0{,}5\ y$, $Y_2 = x - 0{,}5y$ (cf. Annexe).

Le schéma comporte une commutation préprogrammée qui permet de tracer la première ou la deuxième loxodromie en fonction du signe de la variable d'entrée du circuit de commande préprogrammée.

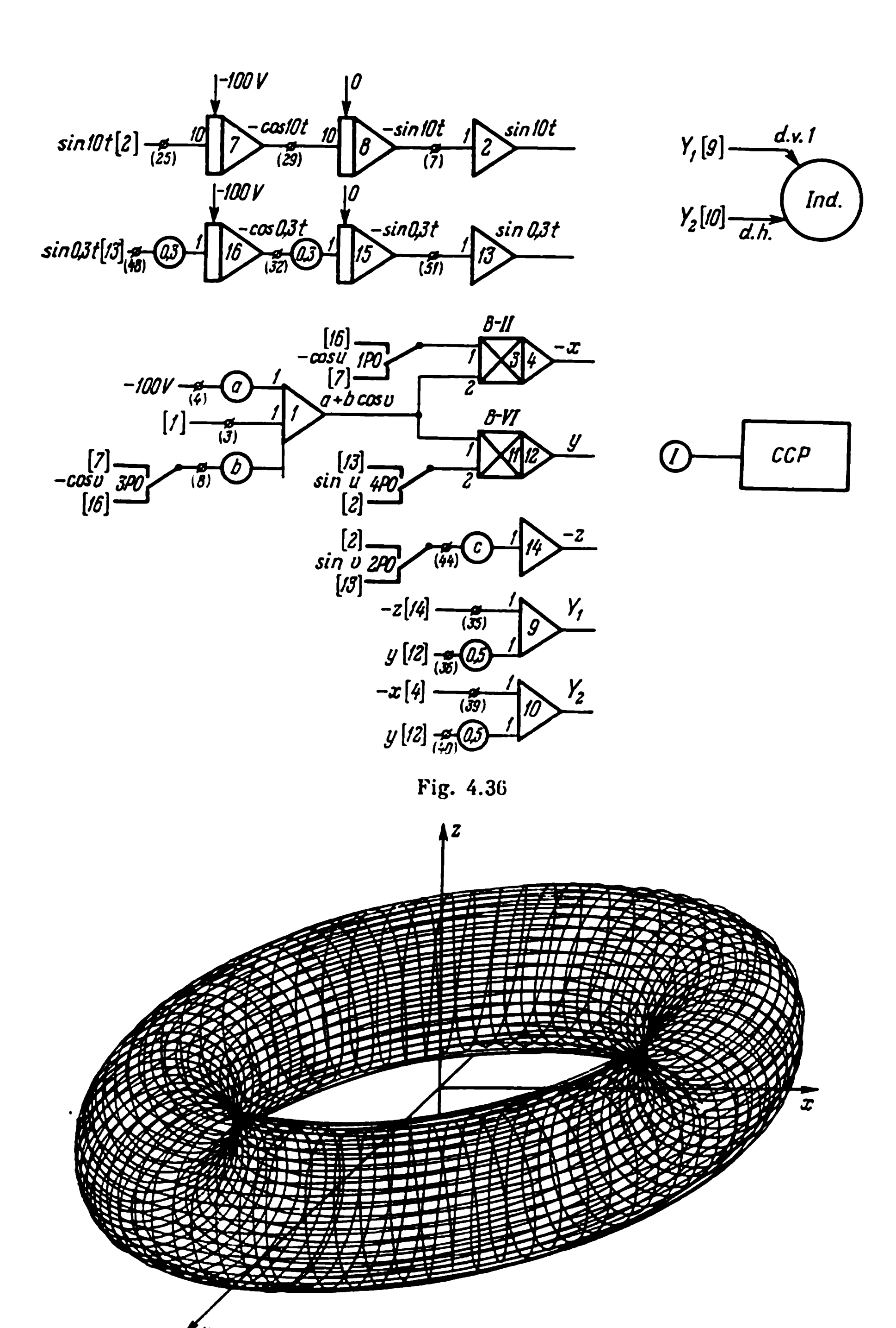


Fig. 4.36

Fig. 4.37

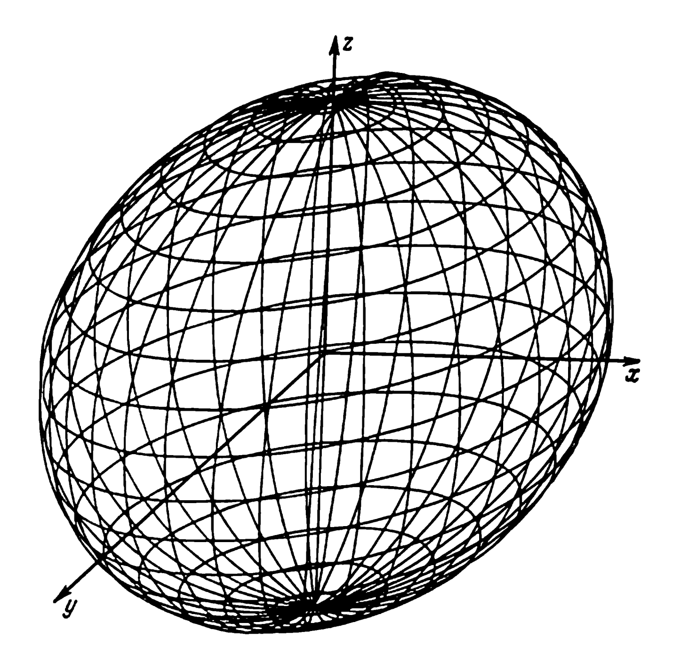


Fig. 4.38

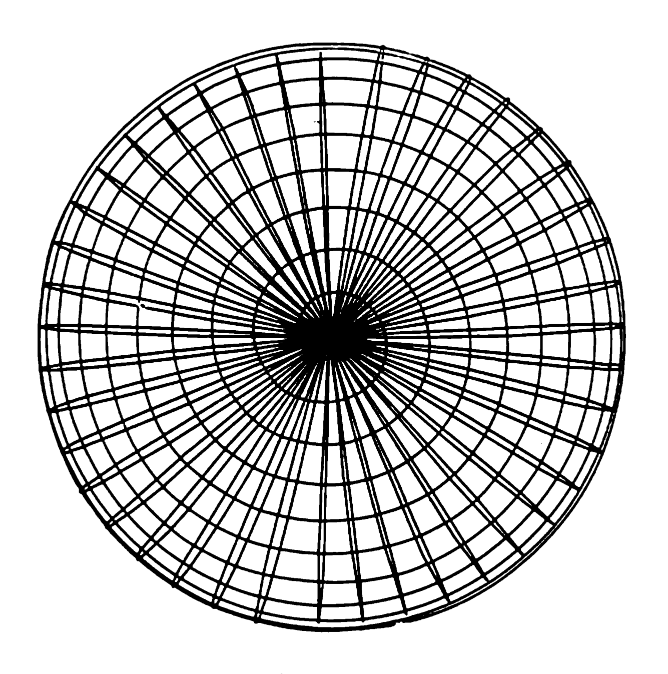


Fig. 4.39

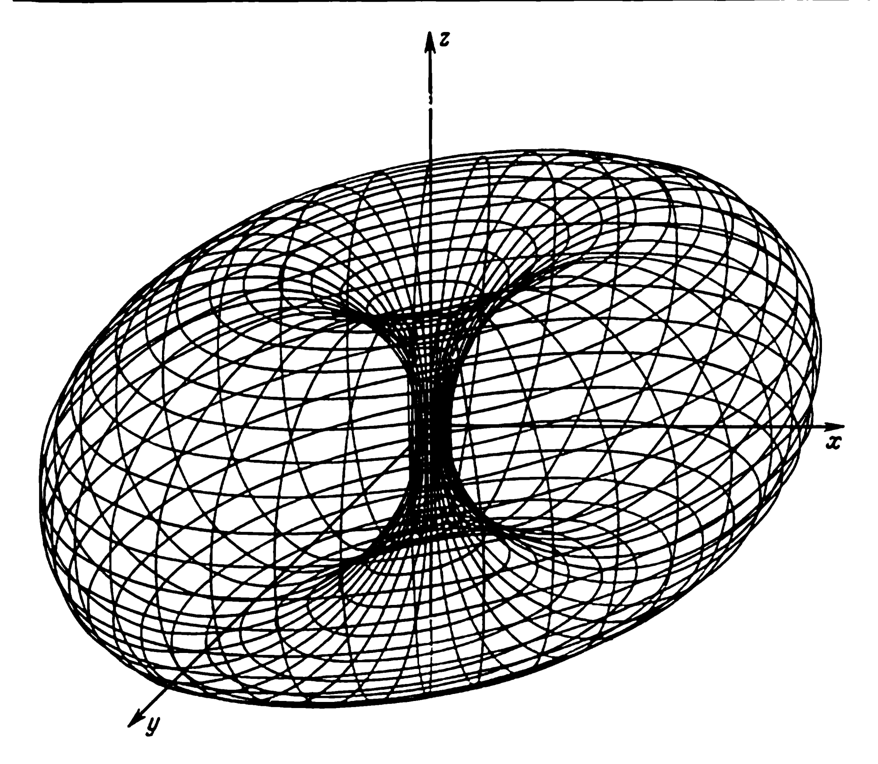


Fig. 4.40

4. Tracé de la surface. La figure 4.37 représente le tracé du tore pour $a = 1{,}0$, $b = c = 0{,}25$ à l'aide de deux loxodromies perpendiculaires. La figure 4.38 montre une sphère, la figure 4.39, les projections des loxodromies de la sphère sur le plan xOy, la figure 4.40, le tore pour $b = c = 1$, $a = 1 + \varepsilon$, où ε est un petit nombre. Lorsque $\varepsilon = 0$ le tore est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une tangente figurée par l'axe Oz. La figure 4.41 représente séparément un tore tracé à l'aide d'une loxodromie méridien et d'une loxodromie parallèle.

§ 11. Graphe de la solution de l'équation de la chaleur

1. Position du problème. Nous allons étudier la distribution non stationnaire de la température dans une paroi épaisse. Ce problème a été décrit au chapitre 3, § 5. On se propose de tracer par la méthode des sections la surface qui traduit la distribution de la température à l'intérieur de la paroi dans le temps et dans l'espace. Nous admet-

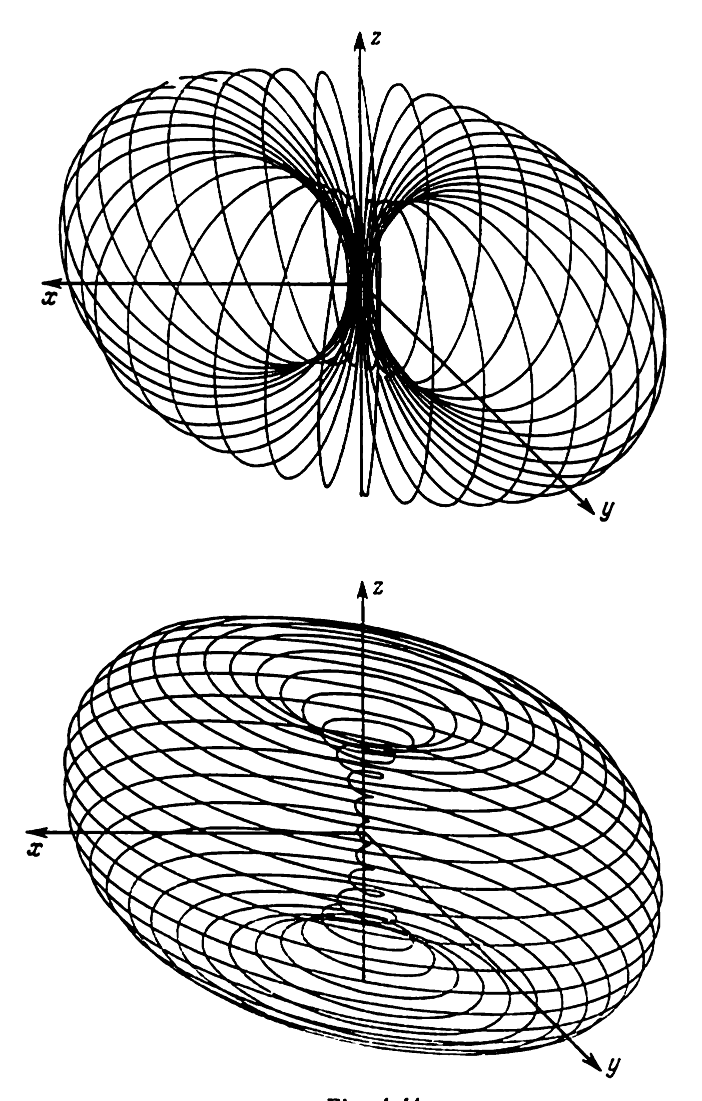


Fig. 4.41

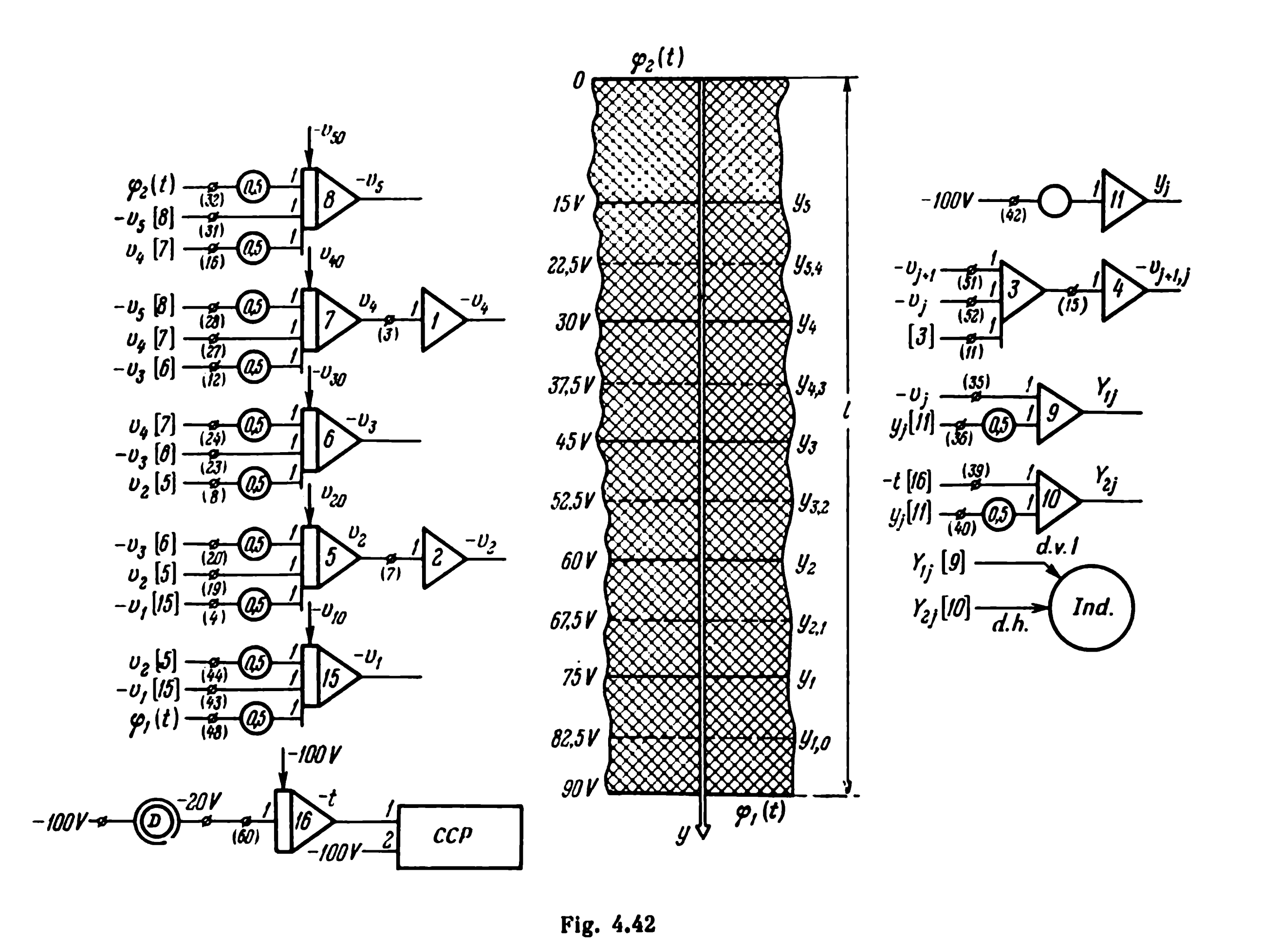


Fig. 4.42

10—0112

trons que la fonction $v(t, y)$ est solution de l'équation de la chaleur (3.11) qui est approchée par un système d'équations différentielles ordinaires (3.13).

2. Schéma de commutation. Le schéma de la figure 4.42 donne le tracé de la solution $v(t, y)$. La surface supérieure de la paroi ($y = 0$) a une température $v(t, 0) = \varphi_2(t)$, la surface inférieure ($y = l$) une température $v(t, l) = \varphi_1(t)$. La paroi est partagée en six couches par cinq lignes horizontales continues de coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Les variations de la température en fonction du temps, aux points d'intersection de ces droites avec l'axe des y, sont reproduites par les intégrateurs [15], [5], [6], [7], [8] et les inverseurs [1] et [2]. L'intégrateur [16] est utilisé pour élaborer la variable indépendante t et pour interrompre la résolution à l'aide d'un circuit de commande préprogrammée. Les sommateurs [9] et [10] élaborent les variables Y_{1j} et Y_{2j} qui donnent la solution $v(t, y_j)$ en projection axonométrique par les sections y_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$). En modifiant le coefficient de transfert du potentiomètre à l'entrée (42) du sommateur [11] on donne la valeur de la coordonnée spatiale de la section, soit y_j. Les valeurs numériques de ces coordonnées représentées en variables machine sont inscrites à gauche de la paroi, de sorte qu'à y_5 correspond une tension de 15 volts, à y_4 une tension de 30 volts, etc. Les six intégrateurs de la machine MH-7M ne permettent pas de résoudre l'équation de la chaleur dans plus de cinq sections de la paroi. Donc le schéma est complété d'un interpolateur linéaire qui réalise l'interpolation au milieu de l'intervalle des sections. L'interpolateur est constitué des sommateurs [3] et [4]. Les sections médianes de la paroi sont indiquées par des lignes horizontales en pointillé. La température est désignée par $v_{j+1,j}$ dans la section qui se trouve à mi-distance des sections $j + 1$ et j.

3. Résultats de la simulation.

1) Refroidissement « libre ». Une paroi chauffée uniformément jusqu'à une température constante ($v_{10} = v_{20} = v_{40} = v_{50} = 100$ volts), commence à se refroidir à partir de l'instant $t = 0$, puisque $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$ (les liaisons sont rompues aux entrées (32) de [8] et (48) de [15]). La figure 4.43 représente la surface $v(t, y)$ construite par le traceur de courbes section par section ($y_j = \text{const}$). Si l'on dispose d'une vue d'ensemble de la surface $v(t, y)$, il est aisé de compléter *à la main* le tracé des sections de la surface $v(t, y)$ pour $t = \text{const}$. Une de ces sections est représentée sur la figure. Les familles de sections de la surface $y = \text{const}$ et $t = \text{const}$ donnent une image assez expressive du refroidissement de la paroi.

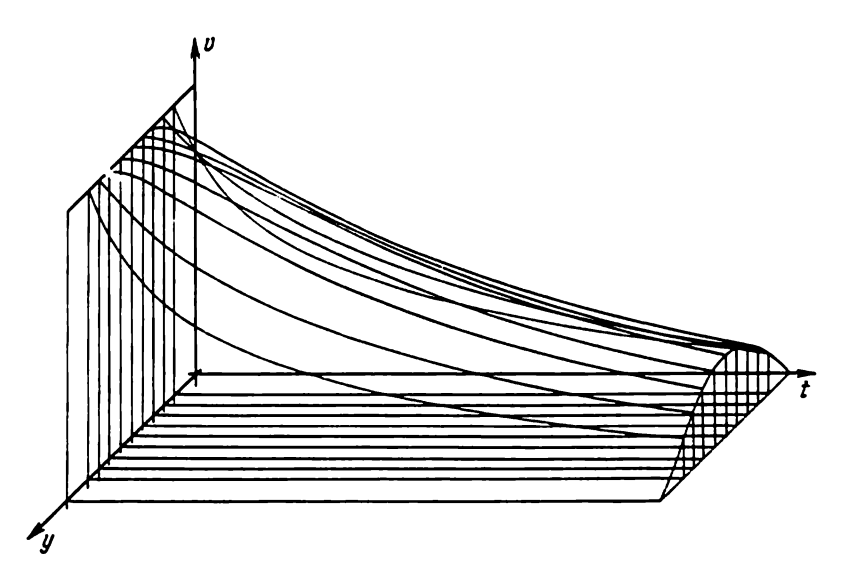


Fig. 4.43

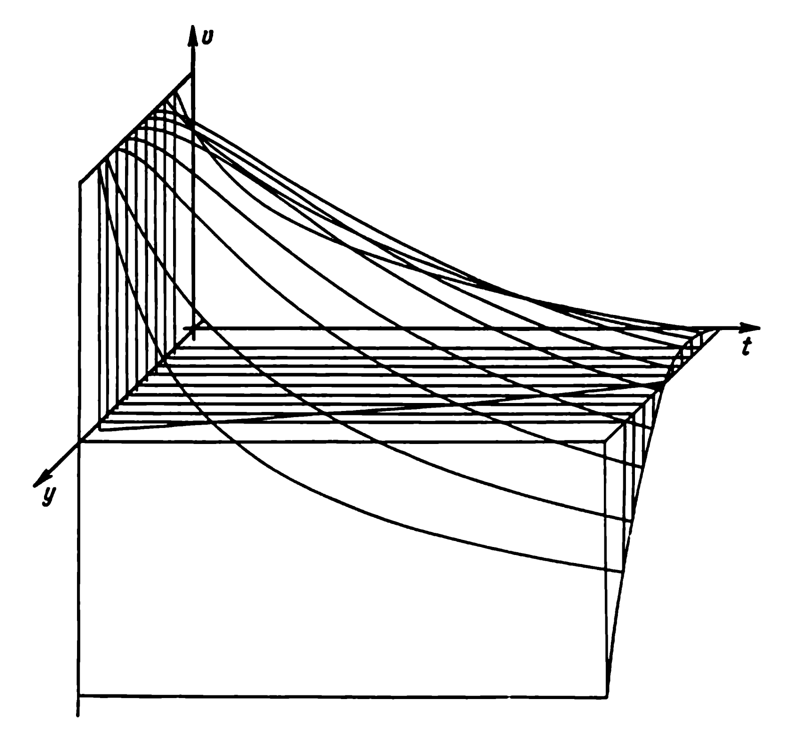


Fig. 4.44

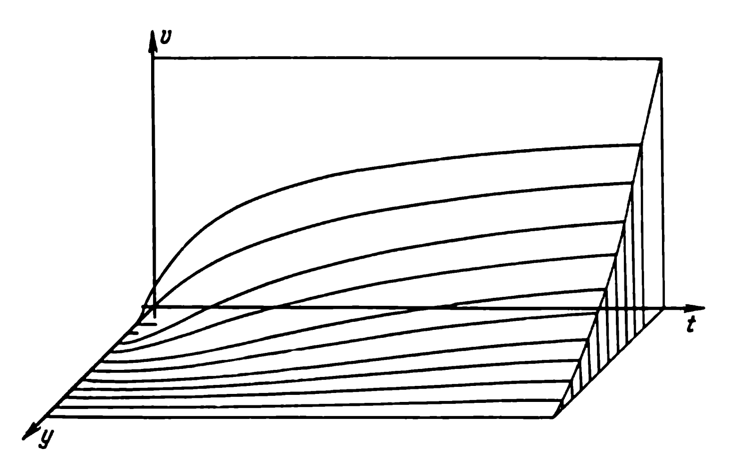


Fig. 4.45

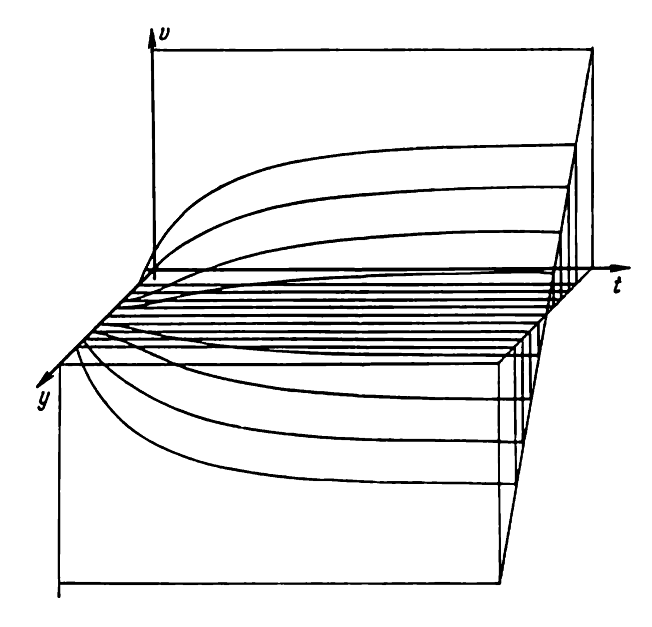


Fig. 4.46

2) Refroidissement «forcé». La paroi chauffée préalablement jusqu'à une température constante ($v_{10} = v_{20} = v_{30} = v_{40} = v_{50} = 100$ volts) commence à refroidir à partir de l'instant $t = 0$. La température de la surface supérieure est maintenue nulle: $\varphi_2(t) = 0$ (rupture de la liaison à l'entrée (32) de l'intégrateur [8]), la surface inférieure est maintenue à une température négative constante: $\varphi_1(t) = \text{const} < 0$ (application d'une tension électrique de — 100 volts à l'entrée (48) de l'intégrateur [15]. La figure 4.44 représente la surface correspondante. Sur le plan yOt on a joint par une ligne les points $v(t, y_j) = 0$ qui correspondent aux instants où la température de la j-ième couche s'annule et devient négative.

3) Réchauffement unilatéral. La paroi dont la température est nulle à l'instant initial ($v_{10} = v_{20} = v_{30} = v_{40} = v_{50} = 0$) commence à se réchauffer à partir de l'instant $t = 0$. En outre la température de la surface $y = 0$ (la supérieure) est constante, i.e. $\varphi_2(t) = \text{const} > 0$ (une tension de 100 volts est appliquée à l'entrée (32) de l'intégrateur [8]). La surface inférieure $y = l$ de la paroi est maintenue à une température constante $\varphi_1(t) = 0$ (par déconnexion à l'entrée (48) de l'intégrateur [15]). Ce cas est illustré sur la figure 4.45. On a construit dix sections de la surface $v(t, y)$ à l'aide du traceur de courbes: cinq d'entre elles ont été obtenues par câblage de l'équation de la chaleur, les cinq autres (y_{j+1}, j) par une interpolation linéaire afin d'accentuer l'effet visuel. L'interpolation n'accroît pas de beaucoup le nombre d'opérateurs. Ici elle a demandé deux sommateurs en plus ([3] et [4]).

4) Réchauffement accompagné d'un refroidissement. La figure 4.46 représente la simulation de la distribution de la température dans l'épaisseur de la paroi lorsque la température $\varphi_2(t)$ de la surface $y = 0$ est une constante positive, i.e. $\varphi_2(t) = \text{const} > 0$ (une tension de 100 volts est appliquée à l'entrée (32) et la température de la surface $y = l$ est une constante négative: $\varphi_1 t = \text{const} < 0$ (une tension de —100 volts est appliquée à l'entrée (48). La surface $v(t, y)$ présente une symétrie axiale. L'axe de symétrie est la droite $v(t, y_3)$. Cette dernière est contenue dans le plan yOt et représente la température de la section médiane de la paroi (sortie de l'intégrateur [6]).

§ 12. Graphe de la solution de l'équation de Poisson

1. Position du problème. On donne une équation différentielle de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -1 \qquad (4.25)$$

dont la solution $u(y, x)$ doit être simulée sur le carré $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ avec les conditions aux limites suivantes $u(-1), x) =$

$= u(1, x) = 0$, $u(y, -1) = u(y, 1) = 0$. Les équations de Poisson décrivent des processus stationnaires tels que la flexion d'une lame, d'une membrane, la torsion d'une tige, la distribution de la chaleur dans une lame, etc. On peut donner à notre problème, par exemple, l'interprétation physique suivante: soit un tube de section carrée à l'extrémité libre duquel est tendue une membrane élastique. A l'intérieur du tube on maintient une pression constante légèrement supérieure à la pression atmosphérique qui bombe la membrane. Si l'on fait un léger vide dans le tube la membrane s'incurvera.

2. Déduction d'expressions mathématiques favorables à la simulation. Pour déduire des expressions mathématiques commodes à la représentation graphique de la solution de l'équation de Poisson (4.25), il nous faut: effectuer une approximation aux différences finies de (4.25) par la méthode des droites, ce qui ramène la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles à celle d'un

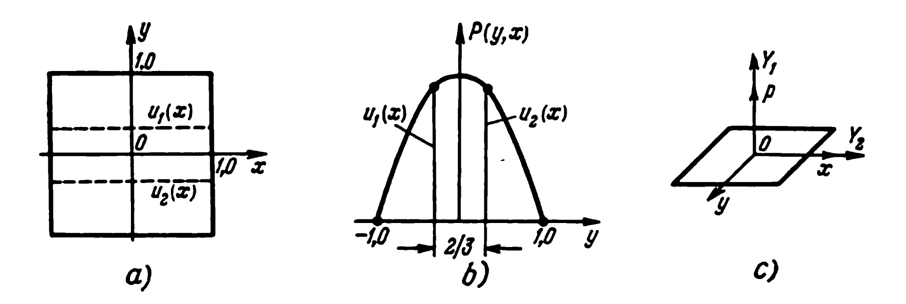


Fig. 4.47

système d'équations différentielles ordinaires; trouver le polynôme d'interpolation qui permet de simuler la solution pour des valeurs arbitraires $x = \text{const}$, $y = \text{const}$; tracer la surface $u(y, x)$ par la méthode des sections.

1) Approximation de l'équation (4.25) par la méthode des droites. La méthode des droites appliquée à l'équation générale de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y) \qquad (4.26)$$

a été améliorée par M. Slobodianski moyennant une prise en considération des dérivées d'un ordre supérieur que de coutume pendant l'approximation aux différences finies. Si la solution $u(y, x)$ de l'équation (4.26) est cherchée sur les droites $y_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, \ldots, n - 1$), l'approximation suivant Slobodianski con-

duit aux systèmes d'équations différentielles

$$u''_{j+1}(x)+10u''_j(x)+u''_{j-1}(x)+\frac{12}{h^2}[u_{j+1}(x)-2u_j(x)+u_{j-1}(x)]=$$
$$=f_{j+1}(x)+10f_j(x)+f_{j-1}(x)\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{4.27}$$

dont l'erreur d'approximation est de l'ordre de h^4, où h est la distance entre les droites y_{j+1} et y_j. S'agissant de l'équation (4.25), si dans le domaine donné des valeurs de x et y (cf. fig. 4.47, *a*) on prend deux droites $y_1 = 1/3$ et $y_2 = -1/3$, on obtient en vertu de (4.27) le système d'équations différentielles ordinaires approximant (4.25) sous la forme du problème aux limites

$$\begin{aligned} u''_2+10u''_1+\frac{12}{h^2}[u_2-2u_1]+12=0,\\ u_1(-1)=u_1(1)=0,\\ 10u''_2+u''_1+\frac{12}{h^2}[-2u_2+u_1]+12=0,\\ u_2(-1)=u_2(1)=0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

2). Interpolation. La symétrie du problème (4.25) (fig. 4.47, *b*) nous permet de conclure que $u_1(x) = u_2(x)$ et au lieu du système (4.28) on a une seule équation

$$u''=\frac{27}{11}u-\frac{12}{11},\quad u(-1)=u(1)=0, \tag{4.29}$$

où $u = u_1(x) = u_2(x)$. Désormais il est aisé de composer la fonction d'interpolation $P(y, x)$. A cet effet exigeons que la fonction cherchée $P(y, x)$ prenne les valeurs

$$0,\ u(x),\ u(x),\ 0$$

sur les droites

$$y=-1,\quad -1/3,\quad 1/3,\quad 1.$$

La fonction d'interpolation se détermine sans peine. Elle vaut

$$P(y, x) = -9/8\,(y^2-1)\,u(x). \tag{4.20}$$

3) Représentation graphique de $u(y, x)$ par la méthode des sections. Au lieu de la fonction $u(y, x)$, on trace le graphe de son approximation (4.30) en tenant compte du problème aux limites (4.29). La figure 4.47, *c* représente le plan Y_1OY_2 rapporté aux axes de coordonnées Oy, Ox, Op sur lequel sera projetée la surface $P(y, x)$ à l'aide des expressions $Y_1 = P - 0{,}5\,y$, $Y_2 = x - 0{,}5\,y$ (cf. Annexe) pour les sections $y = \text{const}$ et à l'aide des expressions $Y_1 = P - 0{,}5\,x$, $Y_2 = y - 0{,}5\,x$ pour les sections $x = \text{const}$.

3. Schéma de commutation. Le schéma de commutation est représenté sur la figure 4.48. Le problème aux limites (4.29) est résolu à l'aide des intégrateurs [5], [6]. Le problème a été réduit à un problème équivalent de Cauchy par la méthode des essais.

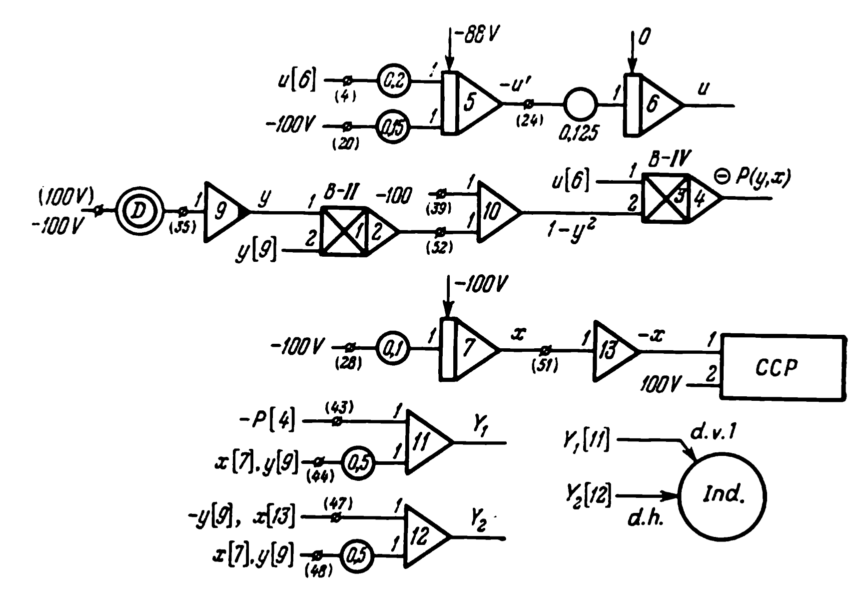


Fig. 4.48

La chaîne d'opérateurs [D], [9], [1], [2], [10], [3], [4] câble (4.30). L'intégrateur [7] et l'inverseur [13] élaborent la variable x, les sommateurs [11] et [12] réalisent le tracé de certaines sections de la surface $P(y, x)$.

4. Résultats de la simulation. La figure 4.49 représente la surface $P(y, x)$ construite par ses sections $y = \text{const}$ d'abord et $x = \text{const}$ ensuite, à l'aide du schéma de la figure 4.48. La section $y = \text{const}$ est donnée à l'aide du diviseur D. Aux valeurs positives de y est associée une tension négative à l'entrée du diviseur et inversement. Le problème étant symétrique, pour passer du tracé des sections $y = \text{const}$ à celui des sections $x = \text{const}$, il suffit de modifier la commutation des liaisons aux entrées des sommateurs [11] et [12]. Sur la figure 4.49, on a découpé le quart de la surface afin de donner une idée de l'incurvation de la membrane élastique. La coupure a été réalisée à l'aide du circuit de commande préprogrammée qui a interrompu la résolution à la condition $x = 0$. La figure 4.50 représente la surface qui correspond à l'incurvation d'une membrane élastique tendue sur un tube de section carrée dans lequel on a fait un léger vide.

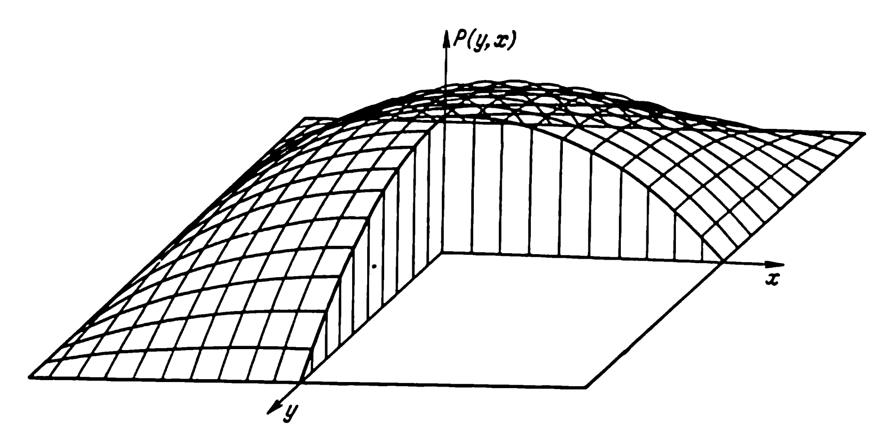


Fig. 4.49

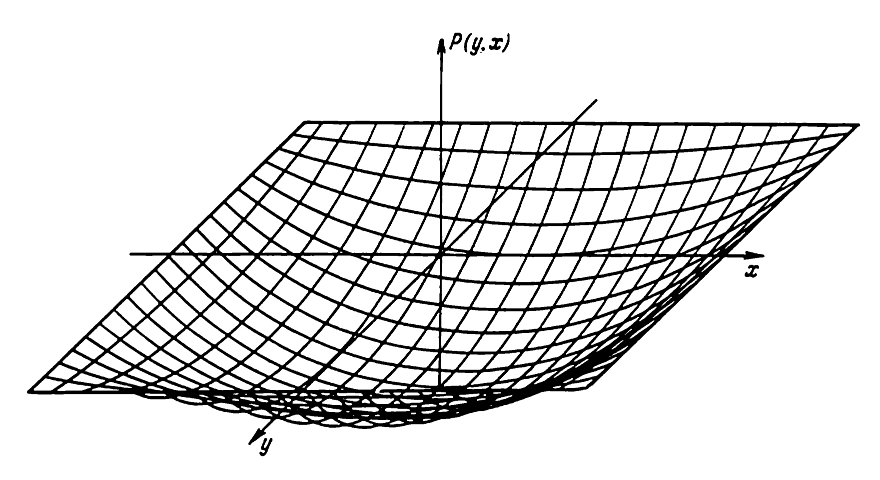


Fig. 4.50

§ 13. Minimisation d'une fonctionnelle

1. Position du problème. Etant donnée la fonctionnelle quadratique

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2) + a_0, \tag{4.31}$$

où a_0, a_1, a_2 sont des constantes positives, on demande d'illustrer la minimisation de cette fonctionnelle.

2. Déduction d'expressions mathématiques favorables à la simulation. Par illustration de la minimisation de la fonctionnelle, on

entend la simulation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$, de ses lignes de niveau $J(x_1, x_2) = \text{const}$ et de ses trajectoires de plus rapide pente, qui sont décrites par les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = -\rho a_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\rho a_1 x_2, \tag{4.32}$$

où ρ est une constante positive paramétrisant le processus.

Une ligne de niveau est l'intersection de la surface $J(x_1, x_2)$ avec le plan $J = \text{const}$, i.e. son équation est

$$J(x_1, x_2) = \text{const.} \tag{4.33}$$

En dérivant (4.33) par rapport à t on obtient

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 0.$$

D'où l'on déduit le système d'équations différentielles déterminantes pour la réalisation des lignes de niveau

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega a_2 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \omega a_1 x_1, \tag{4.34}$$

où ω est une constante non nulle définissant la vitesse de simulation des lignes de niveau. Il est aisé de remarquer que les systèmes d'équations différentielles (4.32) et (4.34) peuvent être représentés par un même système

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \begin{cases} -\rho a_1 x_1 & \text{(minimisation)}, \\ -\omega a_2 x_2 & \text{(lignes de niveau)}, \end{cases} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \begin{cases} -\rho a_2 x_2 & \text{(minimisation)}, \\ \omega a_1 x_1 & \text{(lignes de niveau)}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.35}$$

La réalisation simultanée de (4.35) et (4.31) en tenant compte des formules de projection

$$Y_1 = J - 0{,}5\, x_1, \quad Y_2 = x_2 - 0{,}5\, x_1$$

(cf. Annexe) résout le problème posé.

3. **Schéma de commutation.** Il est représenté sur la figure 4.51. Il est composé des opérateurs [5], [6], [1] qui câblent le système (4.35). Les lignes de niveau sont réalisées dans la position des contacts du relais indiquée sur le schéma. La position inverse donne les trajectoires de plus rapide pente. On peut modifier la position des contacts du relais opérationnel soit manuellement, en inversant le signe de la variable d'entrée du circuit de commande préprogrammée, soit automatiquement, en appliquant la sortie de l'intégrateur [8] à l'entrée du circuit de commande préprogrammée. La chaîne d'opérateurs [14], [7], [8] délivre la fonction 30 sin $10t$. La fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ est minimisée par simulation de la trajectoire de descente

au cours d'une demi-période de la fonction 30 sin $10t$; les lignes de niveau sont réalisées pendant l'autre demi-période. Les lignes de niveau et les trajectoires situées sur la surface décrite par (4.31) sont représentées pour donner une idée suggestive de la minimisation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$. Les opérateurs [3], [4], [11], [12], [2] délivrent $J(x_1, x_2)$, les sommateurs [9] et [10] les variables Y_1 et Y_2. Si l'on rompt la liaison du sommateur [9] à l'entrée (35),

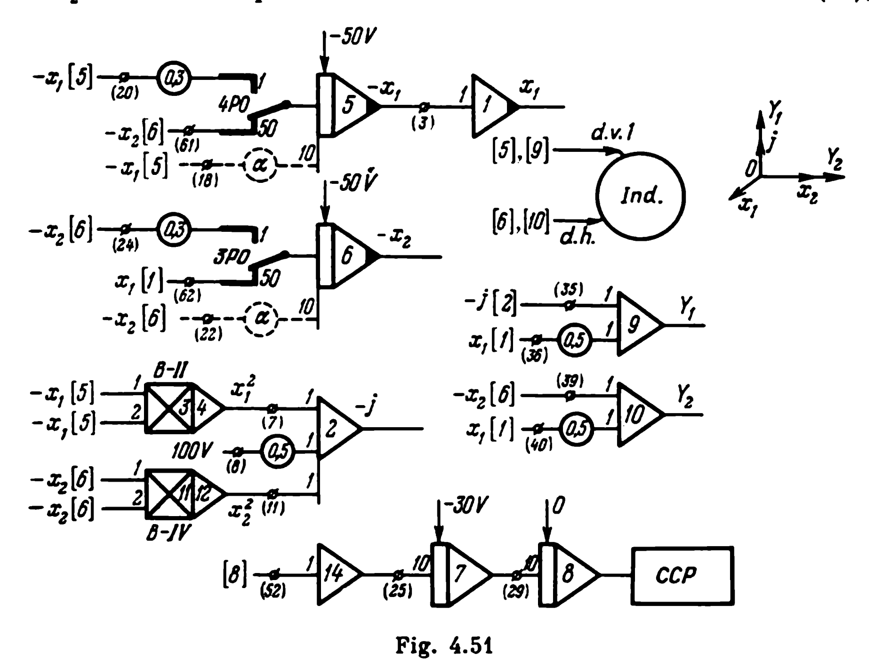


Fig. 4.51

le processus de minimisation sera représenté en projection sur le plan x_1Ox_2. Les paramètres numériques a_0, a_1, a_2, ρ, ω du schéma de la figure 4.51 sont choisis tels que $\rho a_1 = \rho a_2 = 0{,}3$, $\omega a_1 = \omega a_2 = 50$, $a_0 = 50$. La quantité a_0 peut être modifiée à l'aide du potentiomètre placé à l'entrée (8) du sommateur [2].

4. **Résultats.** La solution exacte du problème (4.31) est évidente: le minimum de $J(x_1, x_2)$ est réalisé pour $x_1 = x_2 = 0$ et vaut a_0. Mais c'est bien moins le résultat numérique qui nous intéresse que l'illustration du processus de minimisation.

La figure 4.52 représente la fonctionnelle (4.31) à l'aide de la courbe

$$x_1 = 50 \exp(-\alpha t) \cos 50t, \quad x_2 = 50 \exp(-\alpha t) \sin 50t,$$

qui est située sur la surface $J(x_1, x_2)$. Les variables x_1 et x_2 sont élaborées par les opérateurs [5], [1], [6]. Le coefficient α est défini

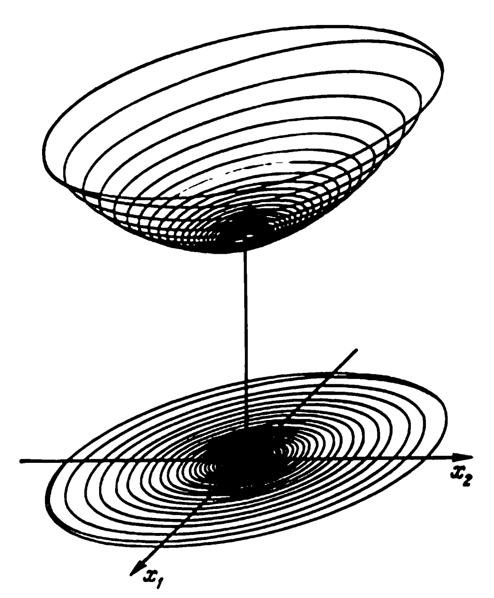


Fig. 4.52

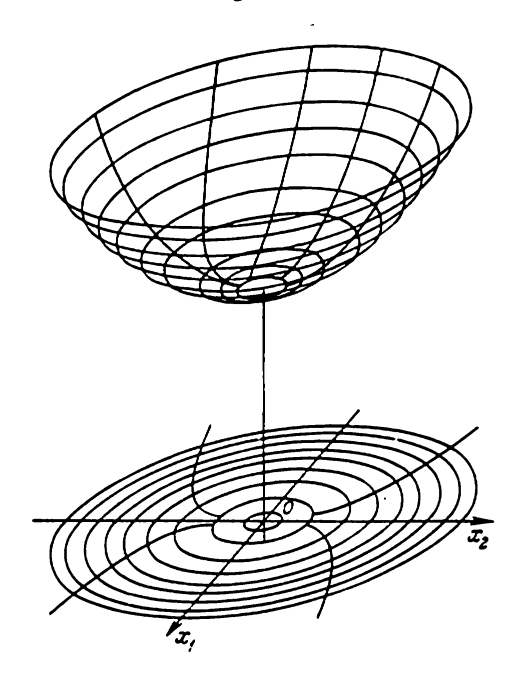


Fig. 4.53

à l'aide des potentiomètres placés aux entrées (18) et (22) des intégrateurs [5] et [6] indiqués en pointillé sur la figure 4.51.

La figure 4.53 représente les lignes de niveau et les trajectoires de plus rapide pente et leurs projections sur le plan x_1Ox_2. A signaler que si le schéma est correctement monté, le voltmètre branché à la sortie du sommateur [2] doit indiquer une tension électrique constante lors de la simulation des lignes de niveau.

§ 14. Redressement avec filtrage

1. Position du problème. Le redressement sert à obtenir du courant continu pour alimenter par exemple des appareils radioélectriques. On redresse la tension du courant alternatif. Le filtrage

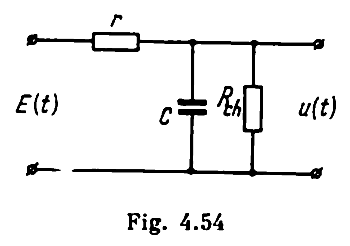


Fig. 4.54

a pour but d'affaiblir la composante alternative de la tension redressée.

On demande de construire le schéma simulant le fonctionnement du filtre d'un redresseur (fig. 4.54). A l'entrée du filtre est appliquée

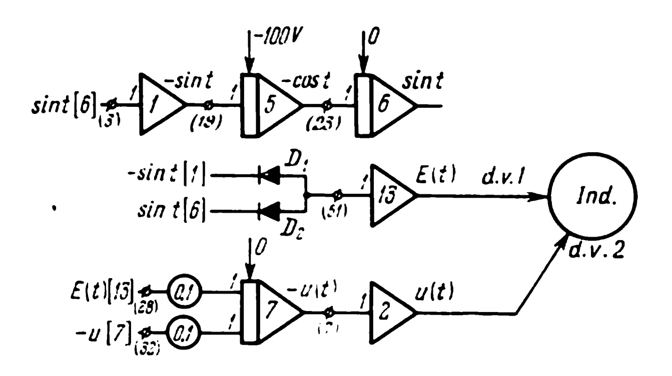


Fig. 4.55

la tension redressée $E(t)$ à une ou deux alternances obtenue à partir d'une tension sinusoïdale. Il existe dans le schéma du filtre un élément réactif pour affaiblir la composante alternative : c'est un con-

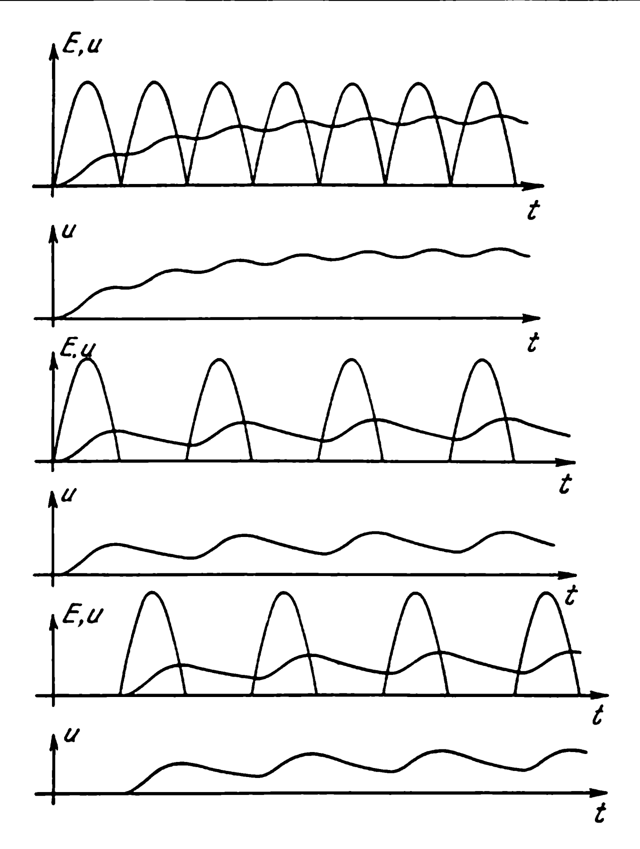


Fig. 4.56

densateur de capacité C. Le filtre fonctionne avec une résistance de charge R_{ch}.

2. Equation différentielle. L'équation différentielle décrivant le fonctionnement du filtre se détermine à l'aide des lois de Kirchhoff. Elle s'écrit

$$u'(t)=\frac{1}{rC}\left[E(t)-\left(1+\frac{r}{R_{h}}\right)u(t)\right],\quad u(0)=0. \qquad (4.36)$$

3. Schéma de commutation. Le schéma de commutation est représenté sur la figure 4.55. La chaîne des opérateurs [1], [5] et [6] élabore les variables sin t, —sin t nécessaires à la formation de la variable $E(t)$. Si la tension redressée est à deux alternances, la variable $E(t)$ est formée à l'aide de l'opération de choix max {—sin t, sin t} câblée par l'inverseur [13] avec deux diodes D_1 et D_2, branchées à son entrée. Si la tension est à une alternance,

la variable $E(t)$ est formée à l'aide de l'opération de choix max $\{-\sin t, 0\}$ ou max $\{0, \sin t\}$; dans ce cas il faut débrancher l'une des deux diodes. La chaîne d'opérateurs [7] et [2] intègre l'équation (4.36). Les coefficients de transfert des potentiomètres placés aux entrées (28) et (32) correspondent à la plus grande valeur de la résistance de charge R_{ch}. Le coefficient de transfert du potentiomètre placé à l'entrée (32) de l'intégrateur [7] vaut $(1 + r/R_{ch})/rC$.

4. **Résultats.** La figure 4.56 représente les tensions d'entrée $E(t)$ et de sortie $u(t)$ du filtre pour divers $E(t)$. Le choix d'une

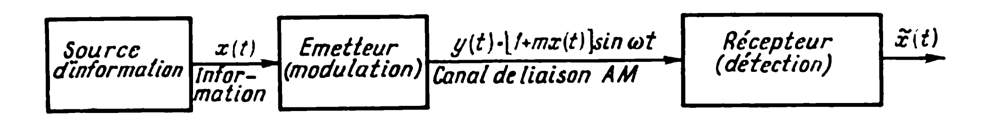


Fig. 4.57

tension $E(t)$ déterminée s'effectue par une commutation adéquate des diodes D_1 et D_2 à l'entrée de l'inverseur [13]. Le schéma de la figure 4.55 permet d'estimer la qualité du filtrage et l'influence exercée sur elle par les paramètres du filtre r, C et de la charge R_{ch}.

§ 15. Modulation d'amplitude et détection

1. **Position du problème.** La figure 4.57 représente schématiquement un système de communication. Il est composé de quatre parties.

1) S o u r c e d'i n f o r m a t i o n. La source choisit une information à transmettre dans un ensemble d'informations possibles. En radiodiffusion les informations sont des fonctions continues de basse fréquence. Désignons par $x(t)$ l'information qui sera diffusée.

2) E m e t t e u r. Il transforme l'information $x(t)$ en un signal radio $y(t)$ qui est transmis par un canal. Pour transmettre une information par émission d'ondes électromagnétiques, il faut, au cours de la transformation de l'information en signal, déplacer le spectre de fréquence de l'information dans le domaine des hautes fréquences radio. Cette transformation d'un signal basse fréquence en un signal haute fréquence constitue une modulation. Dans la modulation d'amplitude le signal $y(t)$ est formé à partir de l'information $x(t)$ conformément à l'expression

$$y(t) = [1 + mx(t)] \sin \omega t, \qquad (4.37)$$

où ω est une fréquence fixe, appelée *fréquence porteuse*, m un nombre positif appelé *taux de modulation*. Le nombre m est choisi inférieur à l'unité et tel que l'expression se trouvant entre crochets soit

positive. La modulation d'amplitude traduit le fait que l'information $x(t)$ agit uniquement sur l'amplitude du signal radio $y(t)$ dans l'expression (4.37).

3) Canal de liaison. Le canal de liaison est le milieu utilisé pour la transmission du signal de l'émetteur au récepteur. En radiodiffusion, le canal de liaison est une bande déterminée de fréquences radio. Au cours de la transmission le signal peut se distordre ou être perturbé. Par souci de simplicité on supposera que le canal utilisé est parfait, c'est-à-dire que le signal n'est ni distordu ni perturbé.

4) Récepteur. Il transforme le signal reçu $y(t)$ en l'information de départ. Le rétablissement de l'information n'est pas idéal, aussi désignera-t-on par $\tilde{x}(t)$ l'information délivrée par le récepteur pour la distinguer de l'information initiale $x(t)$. Sur le plan mathématique, le récepteur réalise la fonction inverse de l'émetteur. En radiotechnique l'opération inverse de la modulation s'appelle démodulation ou détection. Donc la démodulation a pour objet un signal modulé en amplitude $y(t)$ et pour but la transformation de $y(t)$ en information $\tilde{x}(t)$. La démodulation présente de nombreux points communs avec le redressement (cf. § 14). Mais on relève des

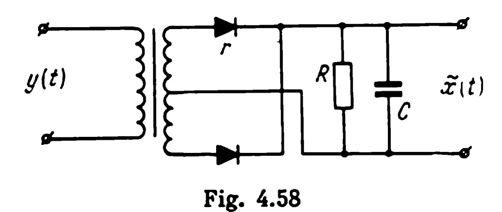


Fig. 4.58

distinctions fondamentales. En effet, si le schéma du redressement avec filtrage est destiné à éliminer toute composante alternative et à obtenir un courant continu, le schéma de démodulation doit dégager de l'amplitude variable du signal la basse fréquence qui correspond à l'information.

La figure 4.58 représente le schéma d'un récepteur élémentaire comprenant un détecteur (redresseur) et un filtre. Le récepteur délivre la variable $\tilde{x}(t)$. On se propose de construire un schéma qui permette de dégager à l'aide de la machine l'influence des paramètres du récepteur et de la fréquence porteuse ω sur la perturbation de l'information $x(t)$.

2. Relations mathématiques favorables à la simulation. Supposons que $x(t) = 1 - \cos t$. La source d'informations est alors simulée par le schéma qui câble la fonction $x(t)$ d'après son équation différentielle déterminante $x'' = 1 - x$, $x'(0) = x(0) = 0$. Supposons par ailleurs que la fréquence porteuse ω du signal radio est

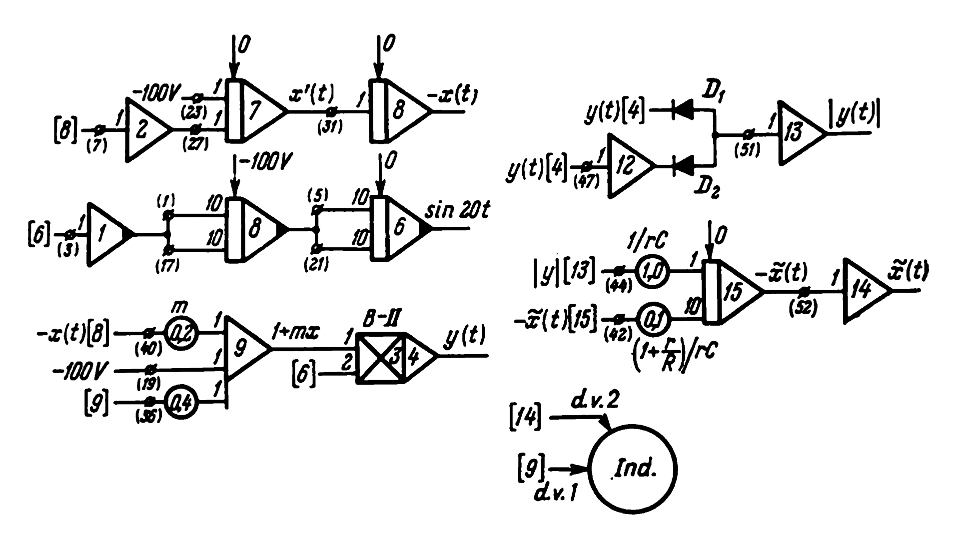


Fig. 4.59

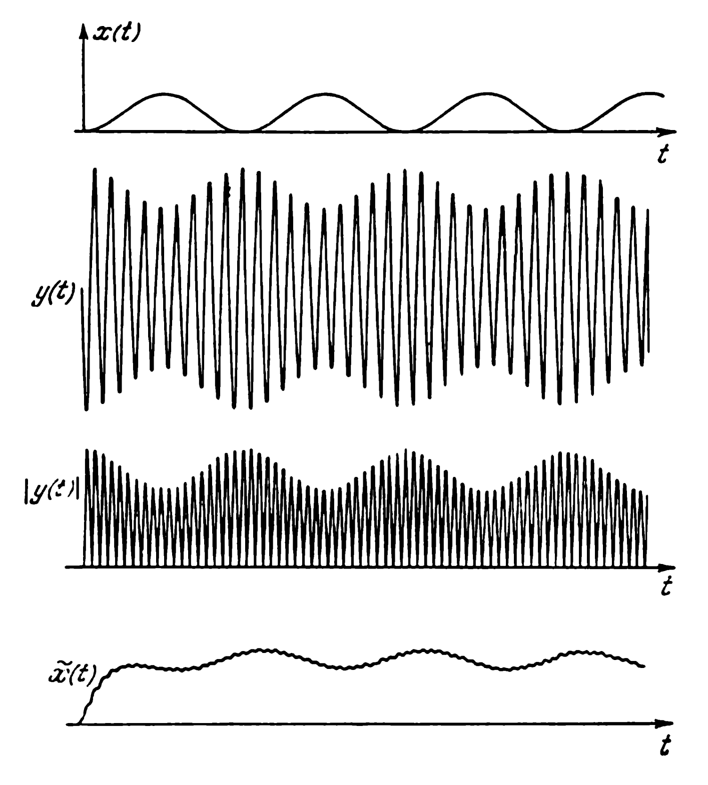


Fig. 4.60

égale à 20 fois la fréquence de l'information, i.e. $z(t) = \sin 20\,t$, où $z(t)$ désigne les oscillations de la fréquence porteuse, et que le générateur de la fréquence porteuse est simulé par le schéma câblant l'équation différentielle

$$z'' = -400\,z, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 20.$$

En vertu de (4.37), la simulation se réduit à une multiplication.

L'équation différentielle décrivant le travail du récepteur est connue du § 14. Dans nos notations, elle s'écrit

$$\tilde{x}'(t) = \frac{1}{rC}\left[\,|\,y(t)\,| - \left(1 + \frac{r}{R}\right)\tilde{x}(t)\right]. \tag{4.38}$$

3. **Schéma de commutation.** Il est représenté sur la figure 4.59. La partie gauche correspond à la modulation d'amplitude, celle de droite à la démodulation. Les opérateurs [2], [7], [8] élaborent l'information $x(t)$. Les opérateurs [1], [5], [6] simulent le générateur de la fréquence porteuse. Les opérateurs [9], [3], [4] réalisent la modulation d'amplitude. Le taux de modulation m est donné à l'aide du potentiomètre disposé à l'entrée (40) du sommateur [9]. Les inverseurs [12], [13] et les diodes D_1 et D_2 délivrent la variable $|\,y(t)\,|$ par câblage de la relation évidente $|\,y(t)\,| = \max\{y(t), -y(t)\}$ à l'aide d'une opération de choix. Dans les termes du phénomène simulé, cette opération traduit le redressement du signal radio et la multiplication par deux de sa fréquence. Les opérateurs [15] et [14] simulent l'équation différentielle (4.38). Les potentiomètres placés à l'entrée de l'intégrateur [15] permettent d'attribuer aux paramètres r, C et R, qui caractérisent le fonctionnement du récepteur, une valeur quelconque prise dans leurs intervalles respectifs de variation.

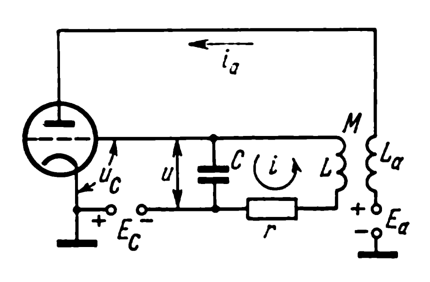


Fig. 4.61

4. **Résultats de la simulation.** La figure 4.60 représente quatre oscillogrammes tracés avec un traceur de courbes d'après le schéma de la figure 4.59. De haut en bas on a l'oscillogramme de l'information $x(t)$, l'oscillogramme du signal radio $y(t)$ modulé en amplitude, l'oscillogramme du signal radio redressé et de fréquence double, l'oscillogramme de l'information $\tilde{x}(t)$ élaborée par le récepteur. L'information représente la composante variable exigée et la composante continue. L'oscillogramme montre que la composante variable de l'information $\tilde{x}(t)$ répète avec un certain retard l'information initiale $x(t)$.

§ 16. Génération d'oscillations

1. Position du problème. La figure 4.61 représente le schéma électrique d'un générateur à tubes. On demande de simuler l'établissement des oscillations dans le générateur. Le générateur de la figure 4.61 a ceci de particulier que le circuit oscillant est intercalë dans le circuit de grille. Dans la figure 4.61 i désigne le courant du circuit, i_a la composante variable du courant anodique, u la tension du circuit (aux bornes du condensateur), $u_g = u - E_g$ la tension de la grille, E_g la polarisation de grille.

2. Déduction des équations différentielles décrivant le fonctionnement du générateur. Si l'on admet l'inexistence des courants de grille en raison de la polarisation suffisante E_g, la loi de Kirchhoff donne

$$L\frac{di}{dt}+ri+\frac{1}{C}\int idt=M\frac{di_a}{dt}. \qquad (4.39)$$

Au second membre, on a une f.é.m. induite dans le circuit oscillant par l'inductance de couplage. Si l'on tient compte du fait que la caractéristique tension-courant grille-plaque peut être représentée au voisinage du point de fonctionnement par une fonction de la tension de grille, soit $i_a = \Phi(u)$, et que $u = \frac{1}{C}\int i\,dt$, alors de (4.39) on déduit que

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left[\frac{r}{L}-\frac{MS(u)}{LC}\right]\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0, \qquad (4.40)$$

où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ désigne la fréquence de résonance du circuit. Pour passer de (4.39) à (4.40), on s'est servi de la relation

$$\frac{di_a}{dt}=\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{dt}=S(u)\frac{du}{dt},$$

où $S(u) = \frac{d\Phi}{du}$ est la pente de la caractéristique grille-plaque. Lorsque l'oscillateur fonctionne en régime doux, la caractéristique grille-plaque est bien approchée par la fonction $\Phi(u) = Su - au^3$. Compte tenu de cette fonction, (4.40) s'écrit

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left[\frac{3aM}{LC}u^2-\left(\frac{MS}{LC}-\frac{r}{L}\right)\right]\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mu=\frac{3aM}{LC}, \quad \gamma=\left(\frac{MS}{LC}-\frac{r}{L}\right)\frac{LC}{3aM}=\left(S-\frac{rC}{M}\right)/3a.$$

L'équation s'écrit alors

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\mu(u^2-\gamma)\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0.$$

La substitution

$$\omega_0 v = \frac{du}{dt} + \mu\left(\frac{u^3}{3} - \gamma u\right)$$

nous conduit au système d'équations différentielles du premier ordre équivalent

$$\begin{aligned} u' &= \omega_0 v - \mu\left(\frac{u^3}{3} - \gamma u\right), \\ v' &= -\omega_0 u. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Si $\mu = 0$, le système (4.41) se transforme en un système d'équations différentielles linéaires décrivant les oscillations d'un circuit sans pertes.

L'étude analytique du système (4.41) sur le plan de phase u, v ne permet d'établir que l'existence d'un cycle limite et d'un point singulier en l'origine des coordonnées. Si $\gamma > 0$ ce point est toujours instable. En effet, le système linéaire de première approximation peut être mis sous la forme

$$u' = \omega_0 v + \mu\gamma u, \quad v' = -\omega_0 u$$

pour u et v petits. Les racines caractéristiques sont toutes deux réelles et positives pour $\mu\gamma \geqslant 2\omega_0$ et complexes à parties réelles positives pour $\mu\gamma < 2\omega_0$. Donc l'origine est un nœud instable pour

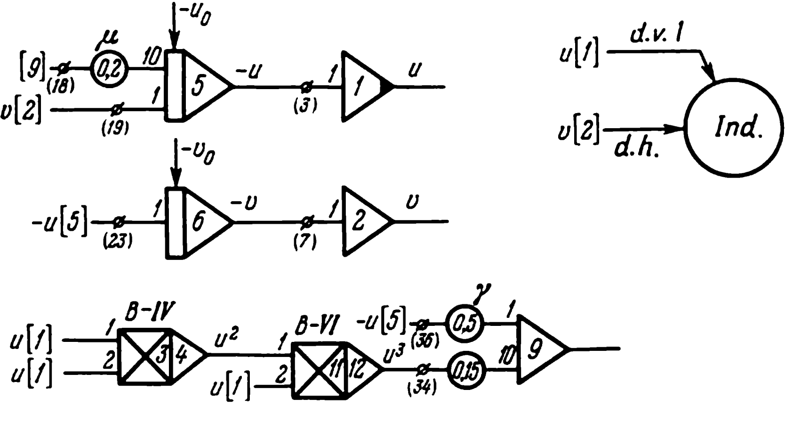


Fig. 4.62

$\mu\gamma \geqslant 2\omega_0$ et un foyer instable pour $\mu\gamma < 2\omega_0$. Il est impossible d'étudier analytiquement l'établissement de l'amplitude de l'oscillateur pour diverses valeurs des paramètres μ, γ, ω_0 en raison des difficultés entraînées par la résolution du système (4.41).

3. Schéma de commutation. Le schéma de commutation qui est représenté sur la figure 4.62 simule le système (4.41). Le sommateur

[9] délivre la somme $-\left(\frac{u^3}{3}+\gamma u\right)$. Le coefficient de transfert du potentiomètre placé à l'entrée (34) ne vaut pas 1/3 mais 1,5 puisque on a tenu compte de l'échelle des multiplieurs élaborant u^3. On fait varier le paramètre γ de l'oscillateur à l'aide du potentiomètre placé à l'entrée (36) du sommateur [9]. La quantité μ appliquée à l'entrée (18) de l'intégrateur [5] peut prendre des valeurs quelconques comprises entre 0 et 11. Le schéma de commutation de la figure 4.62 correspond à $\omega_0 = 1$.

4. Résultats de la simulation. La forme des oscillations engendrées varie en fonction de μ. Ces variations sont traduites aussi bien par les oscillogrammes u (t) que par la trajectoire de phase. La figure 4.63 représente l'allure des oscillations pour trois valeurs distinctes de μ. En bas on a la courbe de phase et l'oscillogramme des

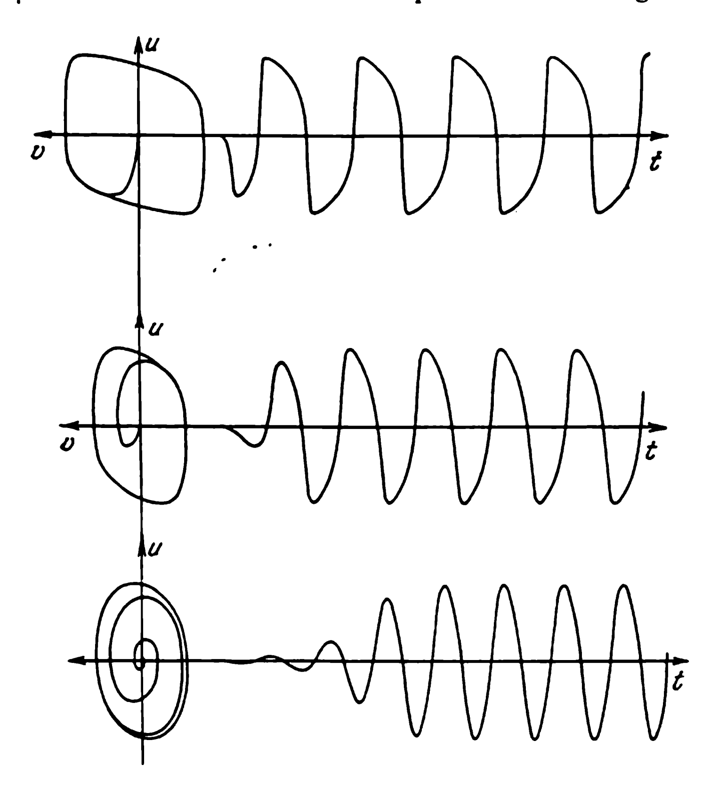


Fig. 4.63

oscillations pour μ relativement petit. Le cycle limite est une ellipse. Les oscillations générées sont presque sinusoïdales. Le point initial $u(0) = v(0) = 0$ est un foyer instable. Au milieu on a la courbe

de phase et l'oscillogramme des oscillations générées $u(t)$ pour de plus grandes valeurs de μ. Les oscillations se distinguent nettement d'oscillations sinusoïdales même si la forme du cycle limite ressemble encore à une ellipse. La fréquence des oscillations a diminué, l'amplitude prend plus rapidement ses valeurs permanentes. En haut on a la courbe de phase et l'oscillogramme des oscillations pour μ relativement grand. Le cycle limite rappelle un parallélogramme; les oscillations sont essentiellement non linéaires et rappellent celles d'un multivibrateur. Le point initial $u(0) = v(0) = 0$ est un nœud instable; l'amplitude prend plus rapidement ses valeurs permanentes. La fréquence des oscillations a pratiquement diminué de moitié par rapport au premier cas.

§ 17. Excitation paramétrique (paramétron)

1. Position du problème. On demande de construire un schéma simulant le fonctionnement du paramétron. Dans le paramétron les oscillations sont excitées paramétriquement. Sur le plan électrique, le paramétron est un circuit résonnant à élément réactif non linéaire. Le circuit oscille à la demi-fréquence des oscillations génératrices. Le paramétron est caractérisé par l'existence d'états stables. Cette particularité a suggéré à son inventeur, le savant japonais Hoto, de l'utiliser comme élément de calculatrices numériques pour représenter l'unité binaire de l'information en choisissant l'un des deux états stables distants l'un de l'autre de π radians. La figure 4.64 représente le circuit résonnant à excitation paramétrique comprenant une inductance variable $L(t)$, un condensateur C et une résistance R; u désigne la tension aux bornes du circuit, i le courant traversant l'inductance.

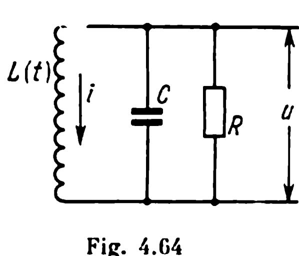


Fig. 4.64

2. Equations différentielles décrivant le fonctionnement du paramétron. La loi de Kirchhoff donne

$$i + \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} = 0. \tag{4.42}$$

Si l'on tient compte de ce que la tension du circuit $u = \frac{d}{dt}(Li)$ et l'inductance varie suivant la loi $L(t) = L_0(1 + 2\gamma \sin 2\omega t)$, où 2ω est la fréquence d'excitation du paramétron, γ le coefficient de modulation, L_0 la composante constante de l'inductance, et si l'on introduit la notation

$$J = \frac{L}{L_0} i = (1 + 2\gamma \sin 2\omega t)\, i, \quad \delta = \frac{1}{\omega CR}, \quad \frac{1}{CL_0} = \omega^2(1 + \alpha),$$

alors on déduit de (4.42) l'équation différentielle

$$\frac{d^2J}{dt^2}+\delta\omega\frac{dJ}{dt}+\omega^2(1+\alpha-2\gamma\sin 2\omega t)\,J=0. \qquad (4.43)$$

On admet que $\alpha \ll 1$ et $\gamma \ll 1$ donc $(1+\alpha)/(1+2\gamma\sin 2\omega t)$ a été remplacé par $1+\alpha-2\gamma\sin 2\omega t$.

Dans l'équation (4.43) δ représente l'amortissement, α le désaccord du circuit.

Si α et δ sont constants, l'équation (4.43) est une équation différentielle linéaire appelée équation de Mathieu. Elle décrit les processus paramétriques d'excitation d'oscillations dans les systèmes linéaires. Les processus se déroulant dans le paramétron

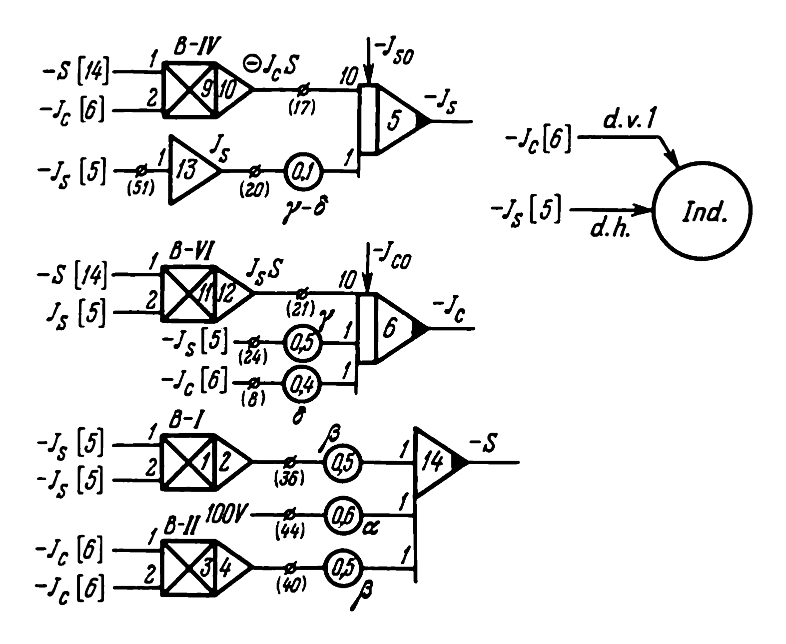


Fig. 4.65

sont essentiellement non linéaires. Dans le circuit de la figure 4.64, la non-linéarité provient de l'utilisation d'un noyau ferromagnétique dans la bobine d'inductance. Avec l'accroissement de l'amplitude du courant la dépendance non linéaire de l'induction B par rapport à l'intensité H du champ magnétique entraîne un désaccord supplémentaire du circuit résonnant et un accroissement simultané des pertes par hystérésis. Donc, l'amortissement δ et le désaccord α seront en général fonction de l'amplitude J^2. Si la non-linéarité est prise en considération sous forme d'un désaccord supplémentaire

βJ^2 du circuit, l'équation s'écrit en définitive

$$\frac{d^2J}{dt^2}+\delta\omega\frac{dJ}{dt}+\omega^2(1+\alpha+\beta J^2-2\gamma\sin 2\,\omega t)\,J=0. \quad (4.44)$$

La décomposition

$$J=J_s\sin\omega t+J_c\cos\omega t, \quad (4.45)$$

où J_s est l'amplitude de la composante sinusoïdale et J_c l'amplitude de la composante cosinusoïdale, et la substitution de (4.45) dans (4.44) donnent le système

$$\begin{aligned}\frac{2}{\omega}J_s'&=-\delta J_s+\gamma J_c-\left[\alpha+\frac{3}{4}\beta\,(J_s^2+J_c^2)\right]J_c,\\ \frac{2}{\omega}J_c'&=-\delta J_c-\gamma J_s+\left[\alpha+\frac{3}{4}\beta\,(J_s^2+J_c^2)\right]J_s.\end{aligned} \quad (4.46)$$

On admet que α, γ, $\delta \ll 1$ et que $\omega \gg 1$.

3. Schéma de commutation. Le schéma de commutation qui est représenté sur la figure 4.65 correspond à $\beta < 0$, $\gamma > \delta$, $\tau = m\omega t/2$, τ étant le temps sans dimension et m un nombre positif jouant le rôle d'échelle. On peut attribuer à α, β, γ, δ une valeur quelconque prise dans leurs intervalles de variation à l'aide des potentiomètres.

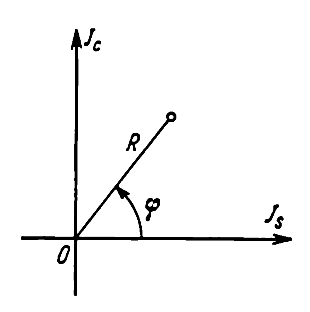


Fig. 4.66

4. Résultats. Les processus se déroulant dans le paramétron se représentent aisément sur le plan de phase J_cOJ_s (fig. 4.66). A tout point de ce plan est associé dans un système de coordonnées polaires un rayon vecteur R dont le module est égal à l'amplitude des oscillations ($R = \sqrt{J_s^2+J_c^2}$) et l'angle polaire φ à la phase des oscillations.

Le cas le plus compliqué du comportement du paramétron est représenté sur la figure 4.67. La courbe de phase présente cinq points singuliers : deux points selle S_1 et S_2 et trois foyers stables alignés. Le foyer du centre correspond à l'origine des coordonnées. Aux deux autres foyers sont associées deux oscillations fixes du paramétron déphasées de π radians. Le paramétron arrive à l'un des trois états stables quelle que soit la position initiale. De tels paramétrons sont dits à trois états stables. Les valeurs numériques des coefficients de transfert des opérateurs de la figure 4.65 correspondent à un paramétron à trois états stables. Si l'on annule α (par rupture de la liaison à l'entrée (44) du sommateur [14]) le paramétron devient bistable. Le point singulier $J_c = J_s = 0$ qui représente l'origine du plan de phase devient un nœud instable.

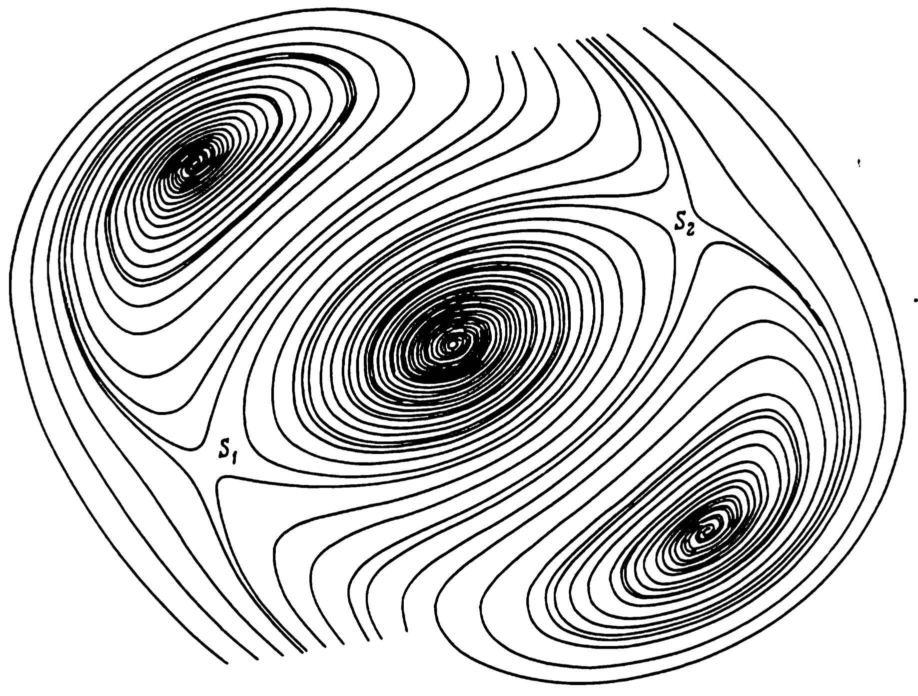


Fig. 4.67

§ 18. Propagation d'une épidémie

1. Position du problème. Construire un schéma simulant la propagation d'une maladie contagieuse qui s'est déclarée dans une localité retirée de H habitants. Au moment où l'épidémie a été découverte, y_0 étaient malades, donc agents infectieux, x_0 étaient encore sains mais potentiellement malades, les autres, soit $z_0 = H - x_0 - y_0$, relevaient de l'infection et étaient immunisés. Le caractère de l'épidémie et les conditions de vie de cette localité sont tels que chaque malade contamine quotidiennement en moyenne β personnes sur mille, chaque malade est immunisé au bout de γ jours de convalescence.

2. Equations différentielles. Soient x les personnes saines mais malades potentiels, z les personnes saines et immunisées, y les malades (agents infectieux). La propagation de l'épidémie est décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10^{-3}\beta xy, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= 10^{-3}\beta xy - \gamma^{-1}y, & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= \gamma^{-1}y, & z(0) &= z_0. \end{aligned} \qquad (4.47)$$

On admet que l'infection se propage par contact, c'est-à-dire que la vitesse de contamination des personnes saines x est proportionnelle à la fréquence de leurs rencontres avec les malades y.

3. Schéma de commutation. La figure 4.68 représente le schéma de commutation simulant le système (4.47). Les valeurs numériques

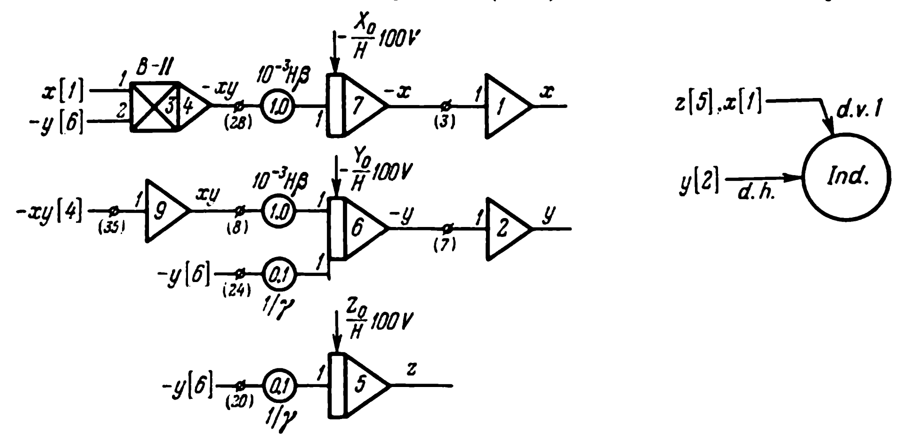


Fig. 4.68

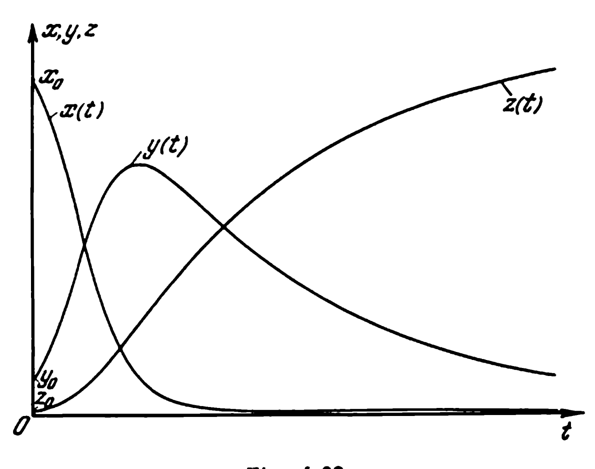


Fig. 4.69

des coefficients de transfert des opérateurs correspondent aux cas $H = 1000$ personnes, $\beta = 1$ personne sur mille, $\gamma = 10$ jours. Une seconde machine représente une journée. On peut faire varier H dans un intervalle assez large à l'aide des potentiomètres placés aux entrées (28), (8), (24) et (20) des intégrateurs [7], [6], [5].

4. Résultats de la simulation. La figure 4.69 représente les oscillogrammes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ obtenus à l'aide du montage de la figure 4.68 sous l'hypothèse que $x_0 = 900$ personnes, $y_0 = 90$ personnes, $z_0 = 10$ personnes. La variable $x(t)$ est monotone décroissante et tend asymptotiquement vers zéro; la variable $y(t)$ présente un extremum à partir duquel elle tend asymptotiquement vers zéro; la variable $z(t)$ est monotone croissante et tend asymptotiquement vers H.

§ 19. Interaction de populations

1. Position du problème. Construire un schéma simulant l'évolution quantitative de deux populations animales coexistantes. A l'instant $t = 0$ pris pour initial, le nombre de sujets de la première population est de x_{10}, celui de la deuxième de x_{20}.

2. Equations différentielles. Pour fixer les idées étudions le modèle correspondant au cas où les rapports entre les populations animales sont du type prédateur — proie, i.e. les animaux d'une espèce, par exemple des lièvres, constituent la pitance des animaux de l'autre espèce, par exemple des lynx. Pour simplifier, tous les facteurs supplémentaires influant sur la modification du nombre des animaux seront supposés constants. Ceci posé, l'évolution du nombre de sujets est décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2 \quad a_{11},\ a_{12} > 0, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2, \quad a_{21},\ a_{22} > 0, \end{aligned} \tag{4.48}$$

qui suppose qu'en l'absence de lynx ($x_2 = 0$) l'accroissement des lièvres est proportionnel à leur nombre x_1. La présence de lynx réduit la prolifération des lièvres. Cette réduction est proportionnelle au nombre de rencontres des lièvres et des lynx. Au contraire, le nombre de lynx croît avec celui des rencontres; la disparition des lièvres entraîne celle des lynx et ce d'autant plus vite que ces derniers sont nombreux.

Sur le plan de phase x_1Ox_2 le système (4.48) présente un point singulier de coordonnées $x_{1éq} = a_{22}/a_{21}$, $x_{2éq} = a_{11}/a_{22}$. Si le nombre initial d'animaux est tel que $x_{10} = x_{1éq}$, $x_{20} = x_{2éq}$, il restera constant. Analysons l'évolution quantitative des animaux en fonction du temps tout d'abord dans un petit voisinage du point d'équilibre. A cet effet, linéarisons le système (4.48). L'introduction des variables $u_1 = x_1 - a_{22}/a_{21}$ et $u_2 = x_2 - a_{11}/a_{12}$ nous donne le système linéarisé

$$\dot{u}_1 = -\frac{a_{12}a_{22}}{a_{21}}u_2, \quad \dot{u}_2 = \frac{a_{21}a_{11}}{a_{12}}u_1$$

ou encore

$$\ddot{u}_1 = -a_{11}a_{12}u_1,$$

d'où il suit que

$$u_1 = A \cos \omega t, \quad u_2 = B \sin \omega t,$$

où A et B sont des constantes et $\omega = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Maintenant il est aisé d'établir qu'au voisinage du point singulier la trajectoire $x(t)$, $y(t)$ est une ellipse, puisque

$$\frac{u_1^2}{A^2} + \frac{u_2^2}{B^2} = 1.$$

Les possibilités de l'étude analytique du comportement de $x(t)$ et $y(t)$ s'arrêtent là. Nous allons utiliser la machine pour représenter les courbes de phase du système (4.48) sur le plan de phase.

3. **Schéma de commutation.** Le schéma de commutation est représenté sur la figure 4.70. Dans la position des contacts du relais indiquée sur la figure, le schéma simule le système (4.48) pour les valeurs numériques suivantes des paramètres: $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 2$. On peut attribuer aux paramètres a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} une valeur quelconque prise dans leurs intervalles de variation à l'aide des potentiomètres disposés aux entrées (20), (18), (22) et (24) des intégrateurs [5] et [6]. Les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont appliquées aux entrées de l'indicateur électronique pour une visualisation de la courbe de phase et des oscillogrammes.

4. **Résultats.** La figure 4.71 représente les oscillogrammes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et la courbe de phase $x_2 = \psi(x_1)$ dessinée par un traceur de courbes à l'aide du schéma de la figure 4.70. La courbe de phase est fermée. Les oscillogrammes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des fonctions périodiques du temps. Leur examen permet de tirer des conclusions importantes: les lynx ne peuvent pas dévorer tous les lièvres; l'équilibre œcologique entre lynx et lièvres revêt un caractère dynamique; le nombre moyen de lynx et de lièvres est invariable pour a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} constants; les nombres initiaux x_{20} de lynx et x_{10} de lièvres influent sur l'amplitude des oscillations $x_1(t)$ et $x_2(t)$ autour des valeurs moyennes.

5. **Généralisation.** Le modèle de coexistence de populations du type prédateur — proie est l'un des modèles œcologiques élémentaires appelés modèles de Voltaire-Lotka. Le schéma de la figure 4.70 permet d'étudier un autre modèle de Voltaire-Lotka:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2, \quad a_{11},\ a_{22} > 0, \\ \dot{x}_2 &= -a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2, \quad a_{21},\ a_{22} > 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Il suffit de changer dans le schéma de la figure 4.70 le signe de la variable appliquée à l'entrée du circuit de commande préprogram-

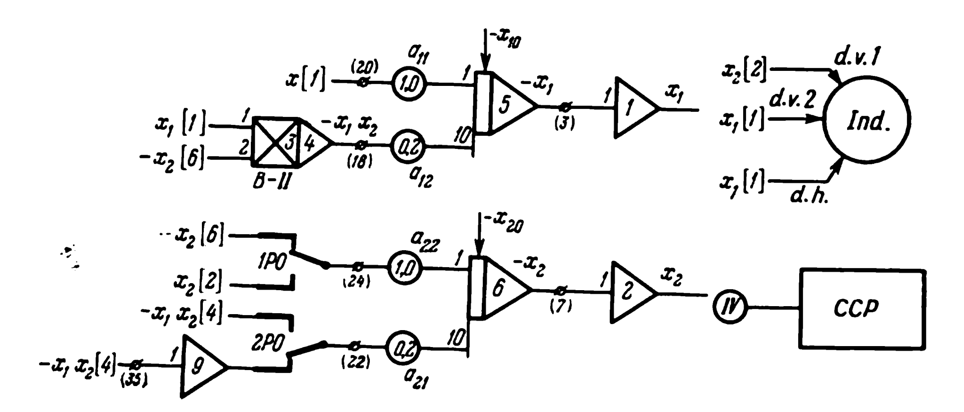
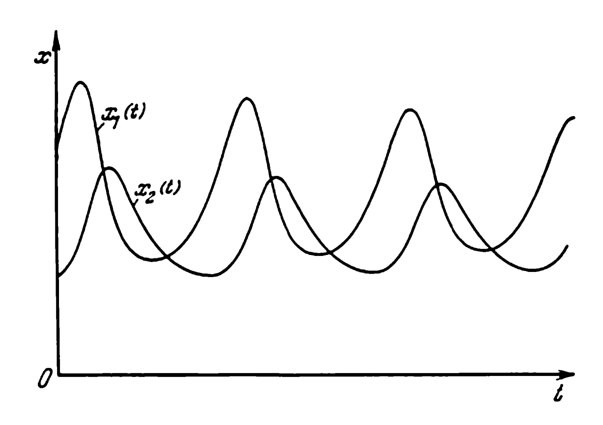


Fig. 4.70



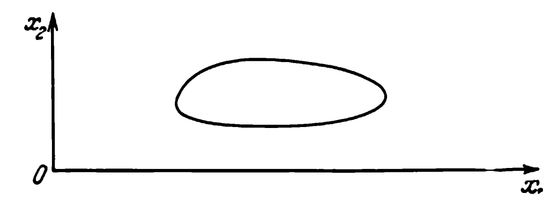


Fig. 4.71

mée. Le système (4.49) décrit la coexistence de deux populations concurrentes du type prédateur — prédateur. La disparition de l'une des populations se traduit par un accroissement proportionnel du nombre de sujets de l'autre population. Les sujets meurent à une vitesse proportionnelle à la fréquence des rencontres des animaux des diverses populations. Le système (4.49) possède le même point singulier que le système (4.48) à la seule différence que ce point correspond désormais à un équilibre instable. En effet, en linéarisant (4.49) au voisinage du point singulier, on obtient l'équation

$$\ddot{u}_1 = a_{11}a_{22}u_1,$$

d'où il vient

$$u_1 = A \text{ ch } \omega t, \quad u_2 = B \text{ sh } \omega t,$$

et la trajectoire est une hyperbole

$$\frac{u_1^2}{A^2} - \frac{u_2^2}{B^2} = 1.$$

Cela veut dire que le point singulier est une selle. Le câblage de (4.48) montre que quels que soient a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} et quelles que soient les conditions initiales, une population de prédateurs extermine l'autre.

Le système (4.49) peut à son tour être généralisé par l'adjonction du terme $-a_{13}x_1^2$ à la première équation et du terme $-a_{23}x_2^2$ à la deuxième, termes qui traduisent l'effet de facteurs conditionnés par le surpeuplement de l'espèce. Le système (4.49) devient alors

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1^2, \qquad a_{11},\ a_{12},\ a_{13} > 0, \\ \dot{x}_2 &= -a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2 - a_{23}x_2^2, \quad a_{21},\ a_{22},\ a_{23} > 0. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Le câblage de (4.50) sous la condition que $a_{12}a_{21} > a_{13}a_{23}$ conduit au même résultat que le système (4.49). Pourtant, si $a_{12}a_{21} < a_{13}a_{23}$, le système (4.50) est stable. Cette stabilité traduit la coexistence de deux populations du type prédateur — prédateur dans un même milieu.

ANNEXE

Représentation suggestive des résultats de la simulation mathématique

1. Projection d'un système de coordonnées spatiales sur un plan. La figure A.1 donne une représentation suggestive d'un système de coordonnées cartésiennes spatiales et d'un point P défini par ses coordonnées. D'une façon générale, la représentation d'un objet sur le plan sera dite suggestive si l'observateur s'imagine facilement cet objet dans l'espace. La représentation suggestive s'obtient par projection. Celle-ci consiste à mener mentalement des droites appelées *projetantes* par les points de cet objet jusqu'à leur intersection

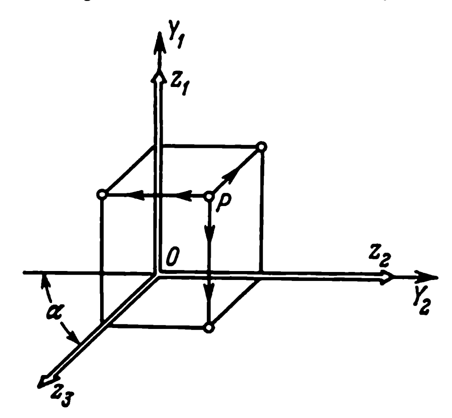


Fig. A.1

avec un plan dit *de projection*. Dans notre cas le plan de projection est le plan rapporté au système de coordonnées cartésiennes Y_1OY_2. On projettera une figure géométrique avec le système de coordonnées par rapport auquel elle est définie. Les projetantes seront parallèles.

Elles percent le plan de projection sous un angle tel que Oz_1, Oz_2 et Oz_3 se projettent respectivement sur OY_1, OY_2 et sur une droite faisant un angle α avec OY_2. Cette projection ne conserve pas tous les angles et toutes les distances. Ainsi sur la figure A.1

l'angle z_2Oz_3 n'est pas droit, il vaut $\pi - \alpha$; les projetantes de P sur les plans de coordonnées du système z_1, z_2, z_3 sont les arêtes d'un parallélépipède rectangle. La projection de ces dernières sur Y_1OY_2 modifie la longueur des arêtes parallèles à Oz_3 et les angles de toutes les faces à l'exception de celles qui sont parallèles au plan de projection. Ces modifications sont indispensables. Elles donnent du relief à la projection du parallélépipède sur le plan. En effet, c'est l'image que perçoit un observateur regardant un petit parallélépipède placé assez loin devant lui, au-dessous du niveau des yeux.

Les appareils d'enregistrement modernes: traceurs de courbes, autoscripteurs, potentiomètres enregistreurs etc., traduisent l'information reçue de la machine par un dessin, schéma ou graphe dans un plan. Les instruments d'observation visuelle: display, indicateurs électroniques utilisent des tubes cathodiques. La représentation d'objets avec une machine implique l'établissement d'une relation entre les coordonnées cartésiennes spatiales z_1, z_2, z_3 d'un point de cet espace, ses projections sur les plans z_1Oz_2, z_1Oz_3, z_2Oz_3 et ses coordonnées cartésiennes correspondantes sur le plan Y_1OY_2.

2. Relations fondamentales dans l'axonométrie parallèle. Dans le cas le plus général de projection parallèle, les relations entre les coordonnées spatiales et leurs projections sur le plan peuvent être représentées sous forme de la transformation affine

$$Y_1 = a_{10} + a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3,$$
$$Y_2 = a_{20} + a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3,$$

où les coefficients a_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2, 3$) dépendent de la disposition respective des systèmes de coordonnées spatial et plan ainsi que des déformations linéaires. Cependant l'effet de relief n'est pas donné par toute transformation affine. On se propose d'étudier analytiquement les principaux cas de représentation suggestive utilisés en dessin industriel et en géométrie descriptive où ils sont exposés dans un esprit essentiellement géométrique et réalisés par des constructions géométriques.

La *perspective axonométrique* correspond au cas représenté sur la figure A.1. Elle est définie par la transformation affine

$$Y_1 = z_1 + a_{13}z_3, \quad Y_2 = z_2 + a_{23}z_3.$$

L'égalité $a_{11} = a_{22} = 1$ traduit l'absence de déformations linéaires sur les axes Oz_1 et Oz_2. Les constantes a_{13} et a_{23} s'expriment sans peine en fonction de l'angle α et du coefficient γ de déformation linéaire sur l'axe Oz_3. En effet, si l'on considère que la figure A.1 est plane, on obtient $a_{13} = -\gamma \sin \alpha$, $a_{23} = -\gamma \cos \alpha$. Dans la perspective axonométrique « classique » on prend $\alpha = \pi/4$ et $\gamma = 1/2$

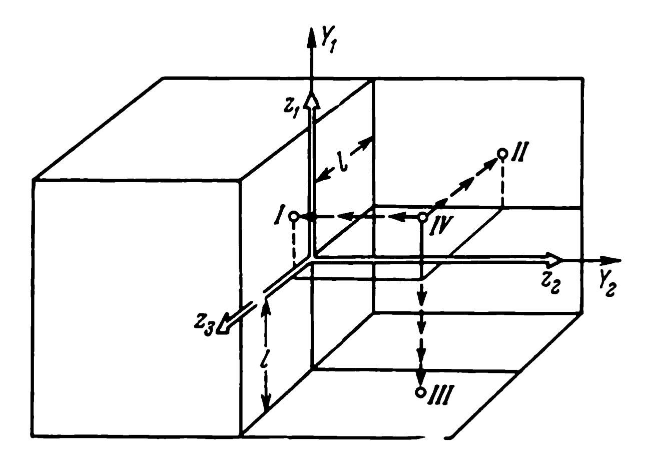


Fig. A.2

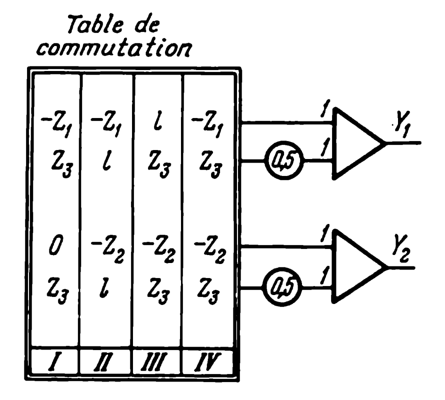


Fig. A.3

ce qui donne

$$Y_1 = z_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} z_3, \quad Y_2 = z_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} z_3.$$

Si $\gamma = \sqrt{2}/2$, on obtient des expressions extrêmement simples

$$Y_1 = z_1 - \frac{z_3}{2}, \quad Y_2 = z_2 - \frac{z_3}{2} \qquad \text{(A.1)}$$

facilement simulables sur la machine.

L'*isométrie orthogonale* est caractérisée par une même déformation sur les trois axes. Par ailleurs l'axe Oz_1 est confondu avec OY_1, les axes Oz_2 et Oz_3 forment avec OY_1 des angles de $\pm 2\pi/3$. L'isométrie orthogonale donne les meilleurs résultats dans la représentation

de surfaces de révolution. On montre qu'elle est définie par la transformation affine

$$Y_1 = z_1 - (z_2 + z_3)/2, \quad Y_2 = (z_2 - z_3)\sqrt{3}/2.$$

La *dymétrie orthogonale* se caractérise par l'absence de déformations sur les axes Oz_1, Oz_3 et une déformation linéaire sur l'axe Oz_2 égale à 0,5. D'autre part $\alpha \approx 7°10'$ et $Lz_2Oz_3 = Lz_1Oz_2 \approx 131°25'$. La dymétrie orthogonale est définie par la transformation affine

$$Y_1 = z_1 - (z_2\sqrt{7} + z_3)/8, \quad Y_2 = 3\,(z_2 - z_3\sqrt{7})/8.$$

Les *représentations combinées* sont la superposition de plusieurs représentations d'un même objet. Sur la figure A.2 on a quatre représentations d'un point : la représentation suggestive IV et trois projections III, II, I. La représentation suggestive IV doit être prise pour fondamentale dans la mesure où les trois autres en découlent. En effet, si IV est donnée par (A.1), la projection I découle de (A.1) par la substitution $z_2 = 0$, la projection II par la substitution $z_3 = -l$ et la projection III par la substitution $z_1 = -l$. Les quatre représentations sont obtenues à l'aide de deux sommateurs montés comme indiqué sur la figure A.3. Le montage de schémas analogues pour l'isométrie et la dymétrie ne soulève aucune difficulté.

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

ÉLÉMENTS DE SIMULATION SUR CALCULATEURS ANALOGIQUES

par A. Ourmaev

Alexandre Ourmaev, candidat au doctorat ès sciences techniques, examine la programmation des calculateurs analogiques pour la résolution de problèmes techniques et scientifiques. Cet ouvrage expose les principes de fonctionnement des calculateurs analogiques et des principaux blocs opérationnels; on y trouve les méthodes générales de programmation des calculateurs analogiques, ainsi que les méthodes de résolution de classes concrètes de problèmes embrassant plusieurs domaines: mécanique générale, physique, électronique, chimie physique, résistance des matériaux, programmation linéaire, etc. Ce manuel est illustré d'un grand nombre d'exemples ainsi que de problèmes dont la résolution permettra au lecteur d'asseoir ses connaissances théoriques.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des instituts techniques. Il peut être utilisé avec le plus grand profit par les professeurs dans la préparation de leurs cours sur les applications des calculateurs analogiques. Il rendra également le plus grand service aux ingénieurs et techniciens qui utilisent les calculateurs analogiques.

MÉTHODES NUMÉRIQUES DANS LES PROBLÈMES EXTRÉMAUX

par B. Pchénitchny, You. Daniline

Cet ouvrage expose les méthodes et les algorithmes utilisés en programmation mathématique, en économie, en théorie de commande optimale, etc., partout où l'on rencontre des problèmes exigeant le calcul numérique des extrémums des fonctionnelles. L'attention particulière est portée aux algorithmes à convergence rapide qu'on peut utiliser avec succès sur les ordinateurs. Dans le livre sont examinées les méthodes de minimisation des fonctions, celles qui imposent les restrictions aux variables indépendantes aussi bien que celles qui ne tiennent pas compte de ces restrictions.

Cette monographie s'adresse aux spécialistes en programmation mathématique, analyse numérique et théorie de commande optimale et à tous ceux qui se heurtent dans leur pratique aux problèmes de minimisation des fonctions.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par V. Mikhaïlov

Le manuel de V. Mikhaïlov, docteur ès sciences physiques et mathématiques, développe un cours fait à l'Institut physico-technique de Moscou. L'objet en est, d'abord, les problèmes aux limites usuels pour les équations elliptiques et, ensuite, le problème de Cauchy et les problèmes mixtes relatifs aux équations paraboliques et hyperboliques du second ordre. L'auteur s'inspire de la notion de solution généralisée, ce qui lui permet de traiter les équations à coefficients variables d'une manière aussi claire que les relations simples (équation de Poisson, équation d'onde, équation de la chaleur). On établit l'existence et l'unicité des solutions et on s'arrête sur les méthodes approchées pour les problèmes aux limites correspondants.

Le livre s'adresse aux étudiants du 3e cycle en mathématiques et en physique.

ÉQUATIONS INTÉGRALES

par M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko

Le présent Cours est **destiné aux étudiants des grandes écoles ayant une formation mathématique poussée** et à tous ceux qui s'intéressent aux méthodes de résolution des principaux types d'équations intégrales. On donne au début de chaque chapitre un résumé des principaux résultats, des formules et l'on y étudie en détail des exemples types.